



# 关于 Fogel & Huang 算法在频域中的 最优化问题

王 建 国

(太原工业大学材料工程学院 太原 030021)

## 摘 要

采用 Fogel & Huang 结构,在时域抽取影响系统模型参数的噪声特性,并结合 Kouvaritakis & Trimboli 的研究成果,将这些特性映射到频率响应复平面.提出一种计算过程可以迭代循环的最优收敛算法,并在频域复平面上给出描述系统鲁棒性的包络曲线,所有可能的、随系统不确定性而变化的频率响应都落在该曲线所包围的闭域内.

**关键词:** Fogel & Huang 算法,超平面,边界噪声,实现区域,鲁棒性.

## 1 Fogel & Huang 算法简述

1982 年, Fogel 与 Huang 提出了一种系统辨识方法.在假定已知噪声边界的条件下,该方法给出系统参数的实现区域,而不是象一般的辨识方法(例如最小二乘法)仅仅给出一组估计参数.此处仅扼要介绍单变量情形<sup>[1,2]</sup>:

$$y_t = \mathbf{d}_t^T \boldsymbol{\theta} + \zeta_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

其中  $\boldsymbol{\theta}$  为系统参数,  $q \times 1$  维;  $y_t$  为输出,  $1 \times 1$  维;  $\mathbf{d}_t$  为到  $t$  采样时刻的输入,  $q \times 1$  维;  $\zeta_t$  为测量噪声,  $1 \times 1$  维.

在每一采样时刻  $t$ , 设噪声边界为  $\pm r_t^{\frac{1}{2}}$ , 则有

$$|\zeta_t| \leq r_t^{\frac{1}{2}}, \quad r_t > 0, \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

式(1),(2)意味着

$$y_t - r_t^{\frac{1}{2}} \leq \mathbf{d}_t^T \boldsymbol{\theta} \leq y_t + r_t^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

可见参数组  $\boldsymbol{\theta}$  的约束条件是一对在参数空间内相互平行的超平面,而真实参数组  $\boldsymbol{\theta}^0$  则被夹于其间.每一组递次的数据  $\{y_t, \mathbf{d}_t^T, r_t^{\frac{1}{2}}\}$  均定义一对新的超平面,当前面有  $q-1$  对这样的超平面相交时(假定  $\mathbf{d}_t^T, t = 1, 2, 3, \dots, q$ , 跨越参数空间),其交集形成一个封闭区域.图 1 描述了二维参数空间的情形 ( $q = 2$ ).遗憾的是,即使对于这样一个简单的模型,随着采样时刻  $t$  的增加,定义交集域的顶点数目也会迅速增加,以致无法进行实际计算.

因而,问题转化为寻找一种可计算的替代域,替代域要尽可能“紧”地包围实现区域.

可不断更新的椭球(圆)是一种很好的替代<sup>[1,2]</sup>,即

$$E_i: (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)^T P_i^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i) \leq 1. \quad (4)$$

其中  $E_i$  是未知参数组  $\boldsymbol{\theta}$  的椭球组,并假定初始椭球  $E_0$  已知. 椭球组  $E_i$  包含了到  $i$  采样时刻观测到的所有参数值,且包围实现区域.

为不断更新椭球参数组,须将式(2)改写为蜕化椭球形式

$$F_i: (y_i - \mathbf{d}_i^T \boldsymbol{\theta})^T r_i^{-1} (y_i - \mathbf{d}_i^T \boldsymbol{\theta}) \leq 1, \quad (5)$$

从而,包含交集  $E_{i-1} \cap F_i$  的新椭球可以写为以下一般形式:

$$(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1})^T P_{i-1}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}) + \rho_i (y_i - \mathbf{d}_i^T \boldsymbol{\theta})^2 / r_i \leq 1 + \rho_i. \quad (6)$$

通过比较式(4)和式(6)的系数,可以推得上述更新椭球的参数为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1} + \frac{\rho_i P_{i-1}^{-1} \mathbf{d}_i v_i}{r_i}, \quad P_i = \left( 1 + \rho_i - \frac{\rho_i v_i^2}{r_i + \rho_i \mathbf{d}_i^T P_{i-1}^{-1} \mathbf{d}_i - P_{i-1}^{-1}} \right). \quad (7)$$

其中

$$v_i \triangleq y_i - \mathbf{d}_i^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1} = \mathbf{d}_i^T (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}) + \zeta_i, \quad P_{i-1}^{-1} \triangleq P_{i-1}^{-1} + \frac{\rho_i \mathbf{d}_i \mathbf{d}_i^T}{r_i}.$$

由于  $|P_i|^{1/2}$  正比于  $E_i$  各轴长之积,最小体积的  $E_i$  可由  $\frac{\partial |P_i|}{\partial \rho_i} = 0$  计算,并由此

得出

$$(q-1)r_i^2 \rho_i^2 + [(2q-1)r_i - r_i - v_i^2]r_i \rho_i + r_i [q(r_i - v_i^2) - r_i] = 0. \quad (8)$$

其中  $q$  为  $\boldsymbol{\theta}$  的维数,  $r_i = \mathbf{d}_i^T P_{i-1}^{-1} \mathbf{d}_i$ .

通过解  $\frac{\partial^2 |P_i|}{\partial \rho_i^2} = 0$ , 可得到最小值.

式(8)中解出的  $\rho_i$  应为正实根. 如果式(8)没有正实根,那么不是表示  $F_i$  没有相交于  $E_{i-1}$ , 就是表示  $|P_i|$  在相交时未曾减小. 对于前一种情形,需要修改模型结构、噪声边界或者初始椭球  $E_0$ ; 对于后一种情形,则意味着在采样时刻  $i$  找不到一个比  $E_i$  更小的椭球  $E_{i-1}$ , 更新过程可以停止,也可以继续进行以排除偶然性. 图2描述了两维 ( $q=2$ ) 的情形.

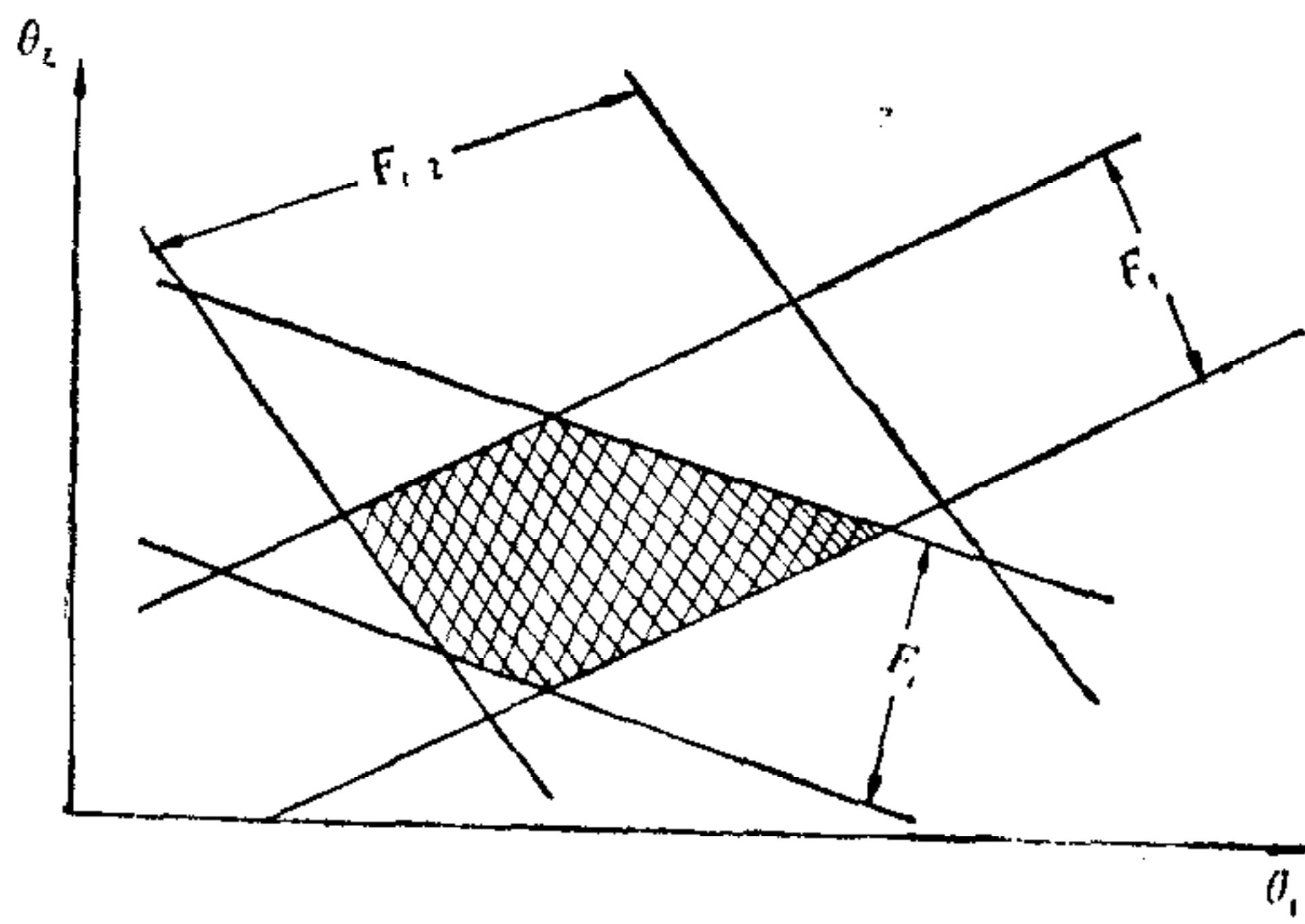


图1 实现区域为图中的交集

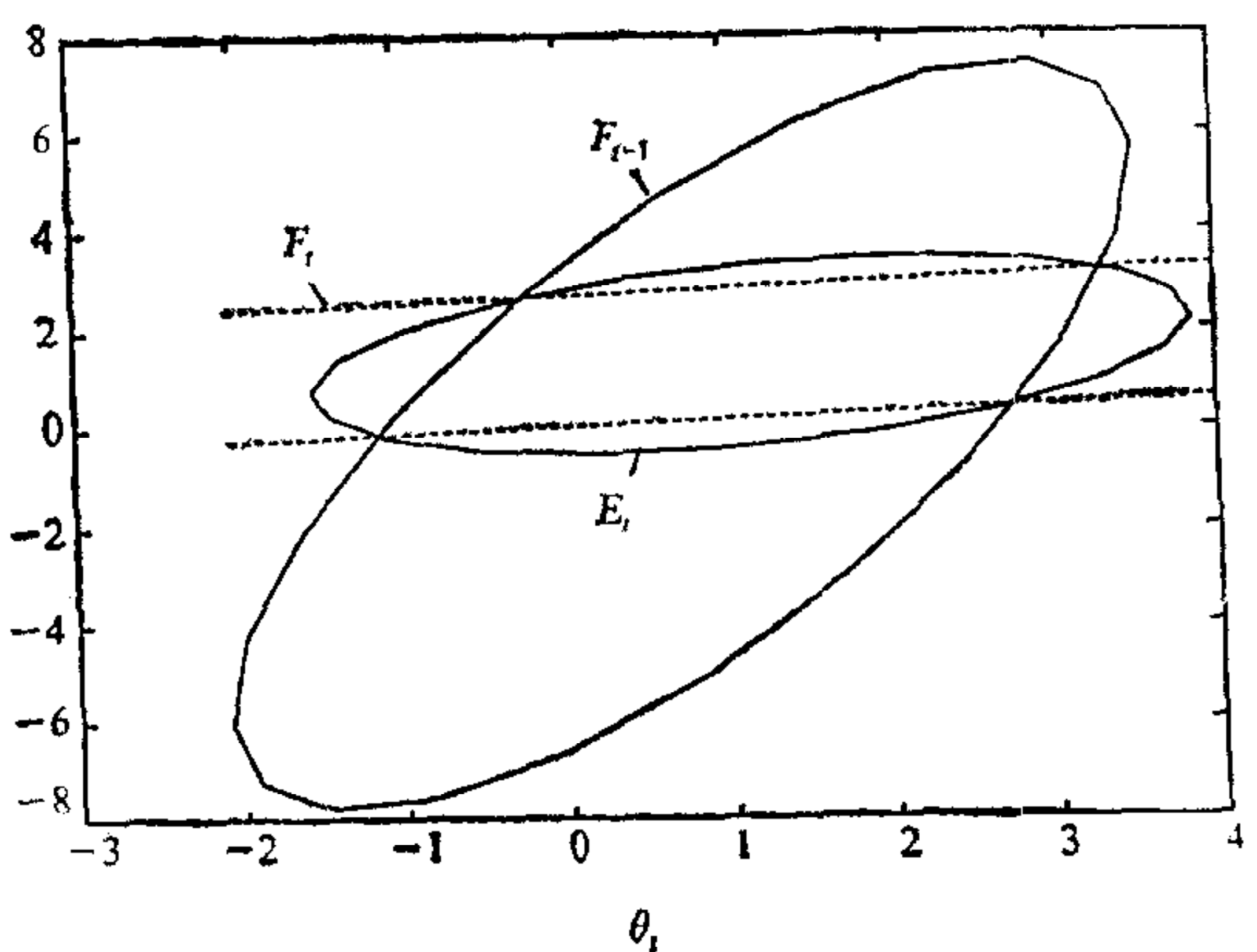


图2 椭圆  $E_{i-1}$  与蜕化椭圆  $F_i$  的交集被椭圆  $E_i$  所包围

## 2 频域分析

在频率分析法中, 包围时域参数向量的最优椭球其实并非我们的第一兴趣. 为了使用这些区域, 需要抽取参数空间的系统特征, 并将这些特征映射到频率响应平面. 一般来讲, 时域下得到的最小椭球(圆)在映射到频域后, 并不一定就是频域中的最小椭圆. 基于这一论点, 并采用了与 Fogel 和 Huang 相似的结构, Kouvaritakis 与 Trimboli 在 1987 年提出了一种新的算法, 这种算法只将第一组时域参数映射到频域, 然后直接在奈魁斯特平面上产生最优包围区域.

### 2.1 传递函数与加权序列

为保证从参数平面 ( $\theta$  平面) 到频率响应平面 ( $g$  平面) 的映射为线性映射, 系统的传递函数须采用加权序列模型<sup>[3]</sup>, 即

$$g(\omega T) = \sum_{i=1}^q g_i \exp[-j(i\omega T)], \quad (9)$$

式中  $\omega$  代表某一频率,  $T$  为采样周期. 由于频率响应通常都是复数, 因此很容易将式(9)分成实频部分与虚频部分

$$g(\omega T) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{g(\omega T)\} \\ \operatorname{Im}\{g(\omega T)\} \end{bmatrix} = H^T(\omega T)\theta, \quad (10)$$

其中  $H(\omega T)$  常简记为

$$H = \begin{bmatrix} \cos(\omega T) & \cos(2\omega T) & \cdots & \cos(q\omega T) \\ -\sin(\omega T) & -\sin(2\omega T) & \cdots & -\sin(q\omega T) \end{bmatrix}^T.$$

### 2.2 映射关系

利用式(10)所给出的模型参数  $\theta$  与频率响应  $g$  之间的线性关系, 可将时域中的椭球方便地映射为频域中的椭圆.

如果将式(4)定义的椭球  $E(\hat{\theta}_i, P_i)$  写为

$$E(\hat{\theta}_i, P_i) = \{\theta: (\theta - \hat{\theta}_i)^T P_i^{-1} (\theta - \hat{\theta}_i) \leq 1\}, \quad (11)$$

则  $E(\hat{\theta}_i, P_i)$  将通过式(10)映射为  $E(H^T \hat{\theta}_i, H^T P_i H)$ <sup>[4]</sup>.

### 2.3 Kouvaritakis & Trimboli 算法简述

首先注意到频域中的鲁棒域是  $H^T(E_{i-1} \cap F_i)$ , 而不是  $(H^T E_{i-1} \cap H^T F_i)$ . 一般地,  $H^T(E_{i-1} \cap F_i) \neq (H^T E_{i-1} \cap H^T F_i)$ <sup>[2]</sup>.

在上节中, 已知椭球的最小体积由  $\frac{\partial |P_i|}{\partial \rho_i} = 0$  决定, 而现在要最小化的是椭球在频

域中的映射, 也就是对  $|H^T P_i H|$  进行最小化<sup>[4]</sup>.

$$\begin{aligned} |H^T P_i H| &= [1 + \rho_i - \rho_i v_i^2 / (r_i^2 + \rho_i \gamma_i)]^2 \cdot |H^T P_{i-1} H| \\ &= f(\rho_i) \cdot |H^T P_{i-1} H|, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} f(\rho_i) &= [1 + \rho_i - \rho_i v_i^2 / (r_i^2 + \rho_i \gamma_i)]^2 [1 - \rho_i c_i / (r_i^2 + \rho_i \gamma_i)], \\ c_i &= d_i^T P_i^{-1} H (H^T P_{i-1} H)^{-1} H^T P_{i-1} d_i. \end{aligned}$$

于是,最小化  $|H^T P, H|$  便转化为最小化  $f(\rho_i)$ . 求  $f(\rho_i)$  关于  $\rho_i$  的偏导数得到以下极值关系:

$$a_3 \rho_i^3 + a_2 \rho_i^2 + a_1 \rho_i + a_0 = 0, \quad (13)$$

式中  $a_3 = 2(\gamma_i - c_i)\gamma_i^2$ ,  $a_2 = (6\gamma_i - 5c_i)r_i^2\gamma_i$ ,  $a_1 = [(6r_i^2 - 2\nu_i^2 - c_i)\gamma_i + 3(\nu_i^2 - r_i^2)c_i]r_i^2$ ,  $a_0 = (2r_i^2 - 2\nu_i^2 - c_i)\gamma_i^4$ .

与 Fogel & Huang 算法不同,式(13)为三次方程,所以  $\rho_i$  至少有一个实根. 至于实根的正负及其与迭代过程之间的关系则类似于上节中的情形,这里不再赘述.

### 3 最优化问题的讨论

采用 Fogel & Huang 算法迭代计算时,所有的最小化运算都是对  $\theta \in \{E_i, E_{i-1} \cap F_i\}$  在时域中进行的(进行到  $t$  采样时刻),然后将最小化结果映射到频域,得到  $g \in \{H^T E_i, H^T(E_{i-1} \cap F_i)\}$ ,即先在时域得到  $P_{i,\min}$ ,然后映射为  $H^T P_{i,\min} H$ . 而 Kouvaritakis & Trimboli 算法是在  $t = t_0$  时先将时域中的椭球映射到频域,然后在频域中对得到的映射椭圆进行最小化运算,即最小化  $|H^T P, H|$ ,到  $t$  时刻,得到  $|H^T P, H|_{\min}$ .

以上两种算法在频域中得到的结果无法分出谁好谁坏,因为既然时域中的最小椭球(圆)映射到频域后并不一定得到频域中的最小椭圆,那么反过来,频域中得到的最小椭圆在还原到时域时,得到的自然也不一定是最小椭球(圆). 换言之,始终在时域或者始终在频域所进行的椭球(圆)更新对于频率分析法来说都不一定为最优,仅当由时域映射到频域的“最后一步”时,讨论“最优更新”才有意义,这一点已经被计算机仿真结果所验证. 事实上,椭球(圆)域的更新可以无限次地进行下去. 更新次数越多,所得到的椭球(圆)域就越“紧”地包围实现区域,但计算次数也就越多,耗时也就越长. 而超过一定次数以后,椭球(圆)被更新的裕量会变得微乎其微,时域或者频域的最优化讨论也就失去意义了. 实际控制中,为了保证系统的速度,往往不得不牺牲一些精度. 这时,即更新次数较少时,“最后一步”的映射与随之进行的最后一次更新便显得重要了.

可以做得更好是将两者结合,即在  $t = 1, 2, \dots, t-1$  时,采用 Fogel & Huang 算法,并将结果映射到频域,得到  $\{H^T E_{i-1}, H^T(E_{i-2} \cap F_{i-1})\}$ . 而在  $t = t_0$  时刻,利用 Kouvaritakis & Trimboli 算法,以便在  $t-1$  到  $t$  时刻的迭代中获得频域中的最优. 这样,在迭代步数较少的情况下,“最后一步”法可以得到比前两种算法更好的结果,而当迭代步数很多时,这三种算法的结果将会极为接近.

### 参 考 文 献

- [1] Fogel E, Huang Y F. On the value of information in system identification—bounded noise case. *Automatica*. 1982, 18: 229.
- [2] Norton J P. An introduction to identification. London: Academic Press, 1985.
- [3] Kouvaritakis B, Wang J G. Causal and bi-causal weighting sequence models in the presence of bounded noise. In: Proceedings Asian-Pacific Conference on Measurement & Control, China, 1991.
- [4] Kouvaritakis B, Trimboli M S. Bounded-error data and frequency response design. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1990, 32: 597—607.

- [5] Kouvaritakis B, Rossiter J A and Wang J G. Generalised Nyquist bands for structured and highly structured uncertainty. *International Journal of Control*, 1991 53(6): 1295—1309.

## OPTIMISATION OF FOGEL AND HUANG'S ALGORITHM IN FREQUENCY DOMAIN

WANG JIANGUO

(*Materials Engineering College, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030021*)

### ABSTRACT

By adopting Fogel & Huang's structure with Kouvaritakis and Trimboli's development, this paper obtains the system model characteristics with the disturbance of noise in time domain, and maps these information into frequency domain. Then gives out an optimised convergent algorithm and describes the system robustness by a closed curve on frequency domain, in which all possible frequency responses.

**Key words:** Fogel & Huang algorithm, hyper-plane, bounded noise, feasible region, robustness.