第22卷 第1期
1996年1月

自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 22, No.1
Jan., 1996

研究简报

# 关于结构奇异值的一个注记[1)]

田玉平

(东南大学自动控制系 南京 210096)

**关键词**: 结构奇异值, 结构式不确定性, 鲁棒性.

## 1 引言

Doyle在1982年提出的结构奇异值($\mu$)方法是分析和综合结构式不确定系统的有力工具[1,2]. 基于结构奇异值分析的小$\mu$定理[2]给出了具有多个摄动块的线性动态系统鲁棒稳定的充要条件. 而鲁棒性能定理[2]则进一步地将鲁棒稳定性问题和鲁棒性能问题统一成$\mu$分析问题. 然而, 我们注意到, 在所有研究结构奇异值的文献中, 均要求块对角摄动矩阵中每个子摄动块是方的. 这一要求无疑大太限制了$\mu$方法的应用, 因为非方摄动块在系统中是经常存在的. 此时对Doyle给出的结构奇异值的上界函数[1]必须进行修正.

## 2 非方摄动下的结构奇异值及其性质

为简便起见, 我们只考虑复矩阵摄动, 标量复摄动和实参数摄动对本文结论不起影响. 记复摄动块数为$f$, 第$i$个摄动块$\Delta_i$的重数为$k_i$, $\Delta_i \in \mathbb{C}^{r_i \times l_i}$. 则我们可以定义块对角摄动矩阵$\Delta \subset \mathbb{C}^{n\times m}$:

$$\mathbf{\Delta}=\{\mathrm{diag}[\underbrace{\Delta_1, \cdots, \Delta_1}_{k_1\text{个}}, \cdots, \underbrace{\Delta_f, \cdots, \Delta_f}_{k_f\text{个}}],\ \Delta_i\in\mathbb{C}^{r_i\times l_i}\}. \tag{1}$$

显然有$m=\sum_{i=1}^{f} k_i l_i$, $n=\sum_{i=1}^{f} k_i r_i$.

**定义1.** 设$M\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 矩阵$M$相对不确定结构$\mathbf{\Delta}$的结构奇异值$\mu_\Delta(M)$定义如下:

$$\mu_\Delta(M)=\begin{cases}(\min\{\bar{\sigma}(\Delta):\ \Delta\in\mathbf{\Delta},\ \det(I-M\Delta)=0\})^{-1},\\ 0,\ \text{如果不存在}\Delta\in\mathbf{\Delta},\ \text{使}\ I-M\Delta\ \text{奇异}.\end{cases}$$

其中$\bar{\sigma}(\cdot)$表示$(\cdot)$的最大奇异值.

当$r_i=l_i$, 即$m=n$时, 上述定义与$\mu$的原始定义相同. $\mu$的大部分性质在有非方$\Delta_i$存在时仍将保持. 为说明不同之处, 我们定义以下几个矩阵集合:

$$\mathbb{B}_\Delta := \{\Delta\in\mathbf{\Delta}:\ \bar{\sigma}(\Delta)\le 1\}, \tag{2}$$

1) 国家自然科学基金资助的课题.

本文于1994年1月3日收到

$$\mathbb{Q}:=\{Q\in\mathbb{\Delta}:\ QQ^*=I_n\},\tag{3}$$

其中 $Q^*$ 表示 $Q$ 的复共轭转置.

$$\mathbb{D}_1:\ =\{\mathrm{diag}[d_1I_{r_1},\ d_2I_{r_2},\ \cdots,\ d_fI_{r_f}],\ d_i\in\mathbb{R},\ d_i>0\},\tag{4}$$

$$\mathbb{D}_2:=\{\mathrm{diag}[d_1I_{l_1},\ d_2I_{l_2},\ \cdots,\ d_fI_{l_f}],\ d_i\in\mathbb{R},\ d_i>0\}.\tag{5}$$

注. $\mathbb{D}_1$ 和 $\mathbb{D}_2$ 中 $d_i(i=1,\ \cdots,\ f)$取相同值.

**定理 1.** $\max\limits_{Q\in\mathbb{Q}}\rho(QM)\leqslant\mu_\Delta(M)\leqslant\inf\limits_{D_1\in\mathbb{D}_1}(D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}})$

其中 $\rho(\cdot)$表示$(\cdot)$的谱半径.

证. 上述不等式的左边同文献[1], 证明略. 右边的证明如下:

由$\mathbb{\Delta}$、$\mathbb{D}_1$ 和 $\mathbb{D}_2$ 的定义知, $\forall\ \Delta\in\mathbb{\Delta}$, $\forall\ D_1\in\mathbb{D}_1$, $\forall\ D_2\in\mathbb{D}_2$, 有 $D_2^{\frac{1}{2}}\Delta=\Delta D_1^{\frac{1}{2}}$. 因此

$$\det(I-M\Delta)=\det(I-MD_2^{-\frac{1}{2}}D_2^{\frac{1}{2}}\Delta)$$
$$=\det(I-MD_2^{-\frac{1}{2}}\Delta D_1^{\frac{1}{2}})=\det(I-D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}}\Delta).$$

故由定义 1 知, $\mu_\Delta(M)=\mu_\Delta(D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}})$. 再由结构奇异值的性质[1] 知:

$$\mu_\Delta(D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}})\leqslant\overline{\sigma}(D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}}).$$

故定理得证. . 证毕.

注. 在定理 1 中我们只需对 $D_1\in\mathbb{D}_1$ 寻优就可以了, 因为 $D_1$ 一旦确定, $D_2$ 也自动生成了.

由于 $\mu$ 难以直接计算, 定理 1 所给的 $\mu$ 的上、下界函数成为计算 $\mu$ 的主要根据. 一般说来 $\max\limits_{Q\in\mathbb{Q}}\rho(QM)$是一个非凸优化问题. 而优化过程 $\inf\limits_{D\in\mathbb{Q}_1}\overline{\sigma}(D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}})$ 对尺度矩阵 $D_1$ 是凸的.

**定理 2.** 设 $M\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 给定实数 $\beta>0$, 则集合

$$\mathbb{D}_\beta:=\{D_1\in\mathbb{D}_1:\ \overline{\sigma}(D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}})<\beta\}$$

是凸的.

证. 下面的一组等价关系是显然的:

$$\overline{\sigma}(D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}})<\beta$$
$$\Longleftrightarrow\lambda_{\max}(D_2^{-\frac{1}{2}}M^*D_1^{\frac{1}{2}}D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}})<\beta^2$$
$$\Longleftrightarrow D_2^{-\frac{1}{2}}M^*D_1^{\frac{1}{2}}D_1^{\frac{1}{2}}MD_2^{-\frac{1}{2}}-\beta^2<0$$
$$\Longleftrightarrow M^*D_1M-D_2\beta^2<0.$$

显然, 最后一个不等式所定义的矩阵集合 $D_\beta$ 是凸的. 证毕.

## 3 结论

本文说明了在 $\mu$ 分析中关于每个子摄动块均是方的这一要求实际上是不必要的. 通过构造尺度矩阵集合 $\mathbb{D}_1$ 和 $\mathbb{D}_2$，给出了在有非方摄动块存在时计算 $\mu$ 的上界的方法，并证明了这一计算问题对尺度矩阵 $D_1$ 来说是凸的.

## 参 考 文 献

[1] Doyle J. C. Analysis of feedback system with structured uncertainties. IEE Proc., Part D, 1982, **129** (6): 242 — 250.

[2] Doyle J. C., Wall J. and Stein G. Performance and robustness analysis for structured uncertainty. IEEE Conf. on Decision and Control, 1982, 629 — 636.

# A REMARK ON THE STRUCTURED SINGULAR VALUE

TIAN YUPING

(*Department of Automatic Control, Southeast University Nanjing* 210096)

**Key words**: Structured singular value, structured uncertainty, robustness.

本期责任编辑 隗秀英