

# 关于非线性 Morgan 问题的 一个充分条件

孙振东 夏小华

(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)

**摘要** 研究一般右可逆非方非线性系统的 Morgan 问题. 在系统结构分解的框架下, 先利用一个类 Singh 算法来刻画系统本性阶与无穷零点的差集, 然后给出一个求取积分串的新算法. 如果上述差集与积分串的长度满足一个简单的不等式关系, 则可以证明, 此时 Morgan 问题一定有解, 并给出一组解耦反馈的构造方法.

**关键词** 非线性系统, Morgan 问题, 结构分解, 积分串.

## 1 引言

非线性 Morgan 问题即非线性系统的非正则静态行对行解耦问题. Freund<sup>[1]</sup>最早研究了方块系统的非线性 Morgan 问题. 文[2]研究了非方系统的 Morgan 问题, 给出当系统输入数比输出数大 1 时 Morgan 问题的解, 但该结果最近被举例指出是错误的<sup>[3]</sup>. 文[4]利用非线性交互圈的概念, 得到关于非线性 Morgan 问题的一个简单的充分条件和一个基本的必要条件.

与线性情形相比, 非线性 Morgan 问题的研究进展相当缓慢, 目前已有的结果相当少. 主要原因是我们对非线性系统的结构性质知之甚少, 特别是, 没有找到与 Morse 结构分解理论平行的结构分解算法. 虽然已经对无穷结构、本性阶等结构不变量有了较系统的研究, 但至今没有一般的算法来提取可用于补偿系统无穷结构的积分串(strings of integrators). 这就使得线性系统的一些研究思路无法推广到非线性情形.

本文对一般右可逆非方非线性系统给出一个求取积分串的算法, 然后利用它得到一般非线性系统可解耦的一个充分条件. 该条件是可验证的, 其证明是构造性的.

## 2 预备知识

所谓非线性 Morgan 问题, 是指寻找形如

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, v \in R^p \quad (1)$$

的反馈变换, 使带输出的仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i = f(x) + g(x)u, x \in R^n, u \in R^m, \\ y = h(x), y \in R^p \end{cases} \quad (2)$$

解耦.

设在(2)式中,向量  $f(x), g(x), h(x)$  的分量是变元  $x$  的亚纯函数. 假定系统(2)右可逆,且  $m > p$ , 即(2)式为非方系统.

对系统(2),记其无穷结构(infinite structure)为  $\{n'_1, \dots, n'_p\}$ , 对输出  $y_i$  的本性阶(essential order)为  $n_{ie}$ . 这两组自然数都是系统的结构常量(在正则反馈变换下保持不变),其具体定义参见文[2].

**引理 1**<sup>[2]</sup>. 系统(2)可通过正则静态解耦的充分且必要条件是

$$\{n'_i\}_p = \{n_{ie}\}_p.$$

记  $l_i = n'_1 - n_{ie}, i = 1, \dots, p$ . 定义系统(2)的齐次阶系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0_{l_1-1} \\ h_1 \\ \vdots \\ 0_{l_p-1} \\ h_p \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{(\sum_{i=1}^p l_i) \times m} \\ g \end{bmatrix} u, \\ \bar{y}_i = \begin{cases} h_i, & l_i = 0, \\ \bar{x}_{\sum_{k=1}^{i-1} l_k + 1}, & l_i > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

可以验证,齐次阶系统(3)的所有本性阶相等(等于  $n'_1$ ).

对系统(3)实施 Singh 算法(见文[5])(必要时交换输出变元的顺序),整理可得

$$\begin{cases} y_1^{(r_1)} = a_1(x) + b_1(x)u, \\ \vdots \\ y_k^{(r_k)} = a_k(x, y_j^{(l)}, r_j \leq l < r_j + r_k, j < k) + \\ \quad b_k(x, y_j^{(l)}, r_j \leq l < r_j + r_k - 1, j < k)u, \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} = a_p(x, y_j^{(l)}, r_j \leq l < r_j + r_p, j < p) + \\ \quad b_p(x, y_j^{(l)}, r_j \leq l < r_j + r_p - 1, j < p)u. \end{cases} \quad (4)$$

定义自然数集  $\Lambda = \{n_{ie} - r_i : n_{ie} - r_i > 0\}$ .

### 3 一个提取积分串的算法

这里我们给出一个算法,从系统能控且不能观部分提取可用来补偿无穷结构的积分串.

记矩阵  $\tilde{B} = (b_1^T, \dots, b_p^T)^T$ . 由于系统(2)右逆,阵  $\tilde{B}$  行满秩. 寻找阵  $\bar{B}(x) : (m-p) \times m$  使得  $\text{rank} \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \bar{B} \end{pmatrix} = m$ . 记  $\bar{z}^1 = x, v^1 = \tilde{B}u, v^2 = \bar{B}u$ , 及  $\tilde{x} = (x, y_i^{(j)}, i = 1, \dots, p, 1 \leq j \leq n)$ .

第 1 步. 记  $\dot{\bar{z}}^1 = \bar{A}_1(x) + \bar{B}_1(x)u$ . 不妨设  $\bar{z}^1 = \begin{pmatrix} z^1 \\ \hat{z}^1 \end{pmatrix}$  使  $\dot{\bar{z}}^1 = A_1(x) + B_1(x)u, B_1$  行满秩,

且  $\text{rank} \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ B_1 \end{pmatrix} = \text{rank} \tilde{B} + \text{rank} B_1 = m$ . 于是有

$$\dot{z}^1 = \hat{A}_1(\tilde{x}) + \hat{B}_1^1(\tilde{x})v^1 + \hat{B}_1^2(\tilde{x})z^1.$$

令  $\tilde{z}^1 = \hat{z}^1 - \hat{B}_1^2 z^1$ , 记  $\tilde{z}^1 = \tilde{A}_1(\tilde{x}) + \tilde{B}_1^1(\tilde{x})v^1 + \tilde{B}_1^2(\tilde{x})v^2$ . 将之分解为(必要时可调换元素的顺序)  $\tilde{z}^1 = \begin{pmatrix} \tilde{z}^2 \\ \hat{z}^2 \end{pmatrix}$ , 使得  $\dot{\tilde{z}}^2 = \bar{A}_2(x) + \bar{B}_2^1(x)v^1$  与  $v^2$  无关.

不妨设  $\tilde{z}^2 = \begin{pmatrix} z^2 \\ \hat{z}^2 \end{pmatrix}$ , 使  $\dot{z}^2 = A_2(x) + B_2^1(x)v^1$  满足  $\text{rank} B_2^1 = \text{rank} \bar{B}_2^1$  且阵  $B_2^1$  行满秩. 于是有  $\dot{\hat{z}}^2 = \hat{A}_2(x) + \hat{B}_2^1(x)\hat{z}^2$ .

令  $\tilde{z}^2 = \hat{z}^2 - \hat{B}_2^1 z^2$ , 记  $\tilde{z}^2 = \tilde{A}_2(x) + \tilde{B}_2(x)u$ , 将之分解为(必要时可调换元素的顺序)  $\tilde{z}^2 = \begin{pmatrix} \tilde{z}^3 \\ \hat{z}^3 \end{pmatrix}$ , 使得  $\dot{\tilde{z}}^3 = A_3(x)$  与  $u$  无关. 于是  $(\tilde{z}^3)^{(2)} = \bar{A}_3^2(x) + \bar{B}_3(x)u$ .

第  $k$  步. 设已构造出  $z^1, \dots, z^{2k-3}, \tilde{z}^1, \tilde{z}^3, \dots, \tilde{z}^{2k-1}$ , 满足

$$(\tilde{z}^{2i-1})^{(i)} = A_{2i-1}(x) + B_{2i-1}(x)u, i = 1, \dots, k - 1,$$

$$(\tilde{z}^{2i-1})^{(i)} = \bar{A}_{2i-1}^i(x) + \bar{B}_{2i-1}(x)u, i = 1, \dots, k.$$

不妨设  $\tilde{z}^{2k-1} = \begin{pmatrix} z^{2k-1} \\ \hat{z}^{2k-1} \end{pmatrix}$ , 使  $(z^{2k-1})^{(k)} = A_{2k-1}(x) + B_{2k-1}(x)u$ ,  $B_{2k-1}$  行满秩, 且  $\text{rank} \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ B_{2k-1} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \bar{B}_{2k-1} \end{pmatrix} = \text{rank} \tilde{B} + \text{rank} B_{2k-1}$ . 于是有

$$(\hat{z}^{2k-1})^{(k)} = \hat{A}_{2k-1}(\tilde{x}) + \hat{B}_{2k-1}^1(\tilde{x})v^1 + \hat{B}_{2k-1}^2(\tilde{x})(z^{2k-1})^{(k)}.$$

令  $\tilde{z}^{2k-1} = \hat{z}^{2k-1} - \hat{B}_{2k-1}^2 z^{2k-1}$ , 记  $(\tilde{z}^{2k-1})^{(k)} = \tilde{A}_{2k-1}(\tilde{x}) + \tilde{B}_{2k-1}^1(\tilde{x})v^1 + \tilde{B}_{2k-1}^2(\tilde{x})v^2$ . 将之分解为

(必要时可调换元素的顺序)  $\tilde{z}^{2k-1} = \begin{pmatrix} \tilde{z}^{2k} \\ \hat{z}^{2k} \end{pmatrix}$ , 使得  $(\tilde{z}^{2k})^{(k)} = \bar{A}_{2k}(x) + \bar{B}_{2k}^1(x)v^1$  与  $v^2$  无关.

不妨设  $\tilde{z}^{2k} = \begin{pmatrix} z^{2k} \\ \hat{z}^{2k} \end{pmatrix}$ , 使  $(z^{2k})^{(k)} = A_{2k}(x) + B_{2k}^1(x)v^1$  满足  $\text{rank} B_{2k}^1 = \text{rank} \bar{B}_{2k}^1$  且阵  $B_{2k}^1$  行满秩. 于是有  $(\hat{z}^{2k})^{(k)} = \hat{A}_{2k}(x) + \hat{B}_{2k}^1(x)(z^{2k})^{(k)}$ .

令  $\tilde{z}^{2k} = \hat{z}^{2k} - \hat{B}_{2k}^1 z^{2k}$ , 记

$$(\tilde{z}^{2k})^{(k)} = \tilde{A}_{2k}(\tilde{x}) + \tilde{B}_{2k}(\tilde{x})u,$$

将之分解为(必要时可调换元素的顺序)  $\tilde{z}^{2k} = \begin{pmatrix} \tilde{z}^{2k+1} \\ \hat{z}^{2k+1} \end{pmatrix}$ , 使得  $(\tilde{z}^{2k+1})^{(k)} = A_{2k+1}(x)$  与  $u$  无关.

于是

$$(\tilde{z}^{2k+1})^{(k+1)} = \bar{A}_{2k+1}^{k+1}(x) + \bar{B}_{2k+1}(x)u.$$

若  $\tilde{z}^{2k+1}$  空, 则算法结束, 否则继续第  $k+1$  步.

**结论.** 设算法在第  $k^*$  步结束. 记  $y^* = \begin{pmatrix} z^{2k^*-1} \\ z^{2k^*-3} \\ \vdots \\ z^1 \end{pmatrix}$ , 对矩阵  $B^* = \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ B_{2k^*-1} \\ B_{2k^*-3} \\ \vdots \\ B_1 \end{pmatrix}$  自上而下选择

线性无关的行向量, 设得到其第  $1, \dots, p, k_1, k_2, \dots, k_{m-p}$  行是线性无关. 令

$$\xi = \begin{pmatrix} y^*(k_1 - p) \\ \vdots \\ y^*(k_{m-p} - p) \end{pmatrix},$$

其中  $y^*(k)$  是指向量  $y^*$  的第  $k$  个元素.

对每个  $1 \leq i \leq m-p$ , 定义自然数  $\sigma_i = \max\{k : \xi(i) \text{ 是 } z^k \text{ 的元素}\}$ . 于是我们可以定义  $m-p$  个积分串

$$\xi(i)^{(\sigma_i)} = a^i(x) + b^i(x)u \stackrel{\text{def}}{=} v_i.$$

定义自然数集  $\Theta = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{m-p}\}$ .

注. 一般地说, 上述算法提取的积分串不是最大长度的. 但由该算法得到积分串的个数 ( $m-p$  个) 是最大的, 这一事实蕴含了文[4]的 Lemma 4. 1.

### 4 充分条件

给定两个自然数集  $D_i = \{a_1^i, \dots, a_{j_i}^i\}, i=1, 2$ , 称  $D_1 \supseteq D_2$ , 若存在集合  $D_1$  的一种剖分  $D_1 = \bigoplus_{i=1}^l D_{1i}$ , 使得

$$a_i^2 \leq \sum_{k \in D_{1i}} k, i = 1, \dots, j_2.$$

利用上一节提供的算法, 我们可以给出非线性 Morgan 问题有解的一个充分条件.

**定理 1.** 系统(2)的非线性 Morgan 问题有解的一个充分条件是

$$\Theta \supseteq \Lambda. \tag{5}$$

证. 设  $S = \{i : n_{ie} > r_i\} = \{\tau_1, \dots, \tau_l\}, \tau_1 < \dots < \tau_l$  及  $\Lambda = \{q_1, \dots, q_l\}$ . 由(5)式, 不妨设存在整数  $0 = j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_l = m-p$ , 使得

$$\sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i} \sigma_k \geq q_i, i = 1, \dots, l.$$

定义反馈  $v_k = \xi(k+1), k \in \{j_i\}_l$ . 可得到  $l$  个积分串

$$\xi(j_{i-1} + 1)^{(\sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i} \sigma_k)} = v_{j_i}, i = 1, \dots, l.$$

由于  $r_i = n_{ie}, i=1, \dots, \tau_1-1$ , (4)式的前  $\tau_1$  式形为

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^{(n_{1e})} = a_1(x) + b_1(x)u, \\ \vdots \\ y_{\tau_1-1}^{(n_{(\tau_1-1)e})} = a_{\tau_1-1}(x) + b_{\tau_1-1}(x)u, \\ y_{\tau_1}^{(r_{\tau_1})} = a_{\tau_1}(x) + b_{\tau_1}(x)u. \end{array} \right.$$

令  $a_{\tau_1}(x) + b_{\tau_1}(x)u = \xi(1)^{(\sum_{k=1}^{j_1} \sigma_k - q_1)}$ , 则有

$$y_{\tau_1}^{(j)} = y_{\tau_1}^{(j)}(x), \quad j = r_{\tau_1}, \dots, n_{\tau_1e} - 1,$$

及

$$y_{\tau_1}^{(n_{\tau_1e})} = v_{j_1}.$$

至此,我们有

$$\begin{cases} y_1^{(n_{1e})} = a_1(x) + b_1(x)u, \\ \vdots \\ y_{\tau_1-1}^{(n_{(\tau_1-1)e})} = a_{\tau_1-1}(x) + b_{\tau_1-1}(x)u, \\ y_{\tau_1}^{(n_{\tau_1 e})} = v_{j_1}, \\ y_{\tau_1+1}^{(n_{(\tau_1+1)e})} = a_{\tau_1+1}(x) + b_{\tau_1+1}(x)u, \\ \vdots \\ y_{\tau_2-1}^{(n_{(\tau_2-1)e})} = a_{\tau_2-1}(x) + b_{\tau_2-1}(x)u, \\ y_{\tau_2}^{(n_{\tau_2 e})} = a_{\tau_2}(x) + b_{\tau_2}(x)u. \end{cases}$$

令  $a_{\tau_2}(x) + b_{\tau_2}(x)u = \xi(j_1 + 1)^{(\sum_{k=j_1+1}^{j_2} \sigma_k - q_2)}$ , 则有

$$j_{\tau_2}^{(j)} = y_{\tau_2}^{(j)}(x), j = r_{\tau_2}, \dots, n_{\tau_2 e} - 1,$$

及

$$y_{\tau_2}^{(n_{\tau_2 e})} = v_{j_2}.$$

如此继续下去,令  $a_{\tau_i}(x) + b_{\tau_i}(x)u = \xi(j_{i-1} + 1)^{(\sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i} \sigma_k - q_i)}$ ,  $i = 3, \dots, l$ , 则最后可得到

$$y_i^{(n_{ie})} = \begin{cases} a_i(x) + b_i(x)u, i \notin \{\tau_k\}, \\ v_{j_k}, i = \tau_k. \end{cases}$$

由引理 1 知系统(2)可行对行解耦. 证毕.

例. 考察系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (u_1, x_3(x_8 + x_1), u_2, x_5 + x_1, x_6, x_7, u_3, u_4, x_{10}^2, u_5, u_6), \\ y_1 = x_1, y_2 = x_3, y_3 = x_4 + x_3^2. \end{cases} \quad (6)$$

对系统(6)施行齐次化的 Singh 算法,可计算出  $\Lambda = \{3, 2\}$ .

另一方面,利用我们的算法可提取出 3 个积分串

$$x_2^{(2)} = (x_1 + x_8)u_2 + x_3u_1 + x_3u_4 \stackrel{\text{def}}{=} v_1, \quad x_9^{(2)} = 2x_{10}u_5 \stackrel{\text{def}}{=} v_2, \quad x_{11}^{(1)} = u_6.$$

于是  $\Theta = \{2, 2, 1\}$ .

容易验证条件(5)成立. 因此系统(6)可通过非正则静态反馈实现解耦. 根据定理 1 的证明,可求得一个解耦反馈为

$$\begin{aligned} u_1 &= x_9, u_2 = x_2, u_3 = -6x_3^2(x_1 + x_8)^2 - 8x_2x_{11} - w_1 - 2x_3w_2 + w_3, \\ u_4 &= \frac{1}{x_3}(x_{11} - x_2(x_1 + x_8) - x_3x_9), u_5 = \frac{w_1}{2x_{10}}, u_6 = w_2. \end{aligned} \quad (7)$$

## 5 结束语

对一般右可逆非方非线性系统,本文初步讨论了系统的结构分解问题. 利用齐次化的 Singh 算法,得到系统能控且能观部分的结构分解式,由此可得到系统输入-输出的耦合信息;给出一个算法,从系统能控且不能观部分求取用于补偿系统无穷结构的积分串. 由

上述分解式中可提取两组自然数,定理 1 指出,如果这两组常数满足一简单的不等式,那么系统的非线性 Morgan 问题有解. 定理 1 的条件是可以验证的,其证明是构造性的,但所给条件一般不是必要的.

非线性 Morgan 问题是一个相当困难而复杂的问题. 本文的讨论是初步的. 进一步的工作应该改进本文所给的用于求积分串的算法,以获得更大长度的积分串. 另一方面,我们认为,要深入地研究非线性 Morgan 问题,需要寻求(有别于处理线性 Morgan 问题的)新的思路和数学工具.

### 参 考 文 献

- 1 Freund, E. The structure of decoupled nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 1975, **21**:443—450
- 2 Glumineau A, Moog C H. Nonlinear Morgan's problem; case of  $(p+1)$  inputs and  $p$  outputs. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **37**:1067—1072
- 3 孙振东, 夏小华. 关于非线性 Morgan 问题的一点注记. 见: 中国控制会议论文集, 1996
- 4 Di Benedetto M D, Glumineau A, Moog C H. The nonlinear interactor and its application to input-output decoupling. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1994, **39**:1246—1250
- 5 Di Benedetto M D, Grizzle J W, Moog C H. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 1989, **27**:658—672

## A SUFFICIENT CONDITION FOR NONLINEAR MORGAN'S PROBLEM

SUN ZHENDONG XIA XIAOHUA

(7th Research Division, Beijing Univ. of Aero. and Astro., Beijing 100083)

**Abstract** This paper is to study the so-called Morgan's problem for general nonsquare nonlinear systems. Within the framework of structural decomposition, a quasi-Singh's algorithm is utilized to characterize the gap between the essential orders and the infinite structure, and a new algorithm is offered to calculate strings of integrators. If the gap and the lengths of the strings satisfy a simple inequality, then the corresponding nonlinear Morgan's problem has at least one solution, and a decoupling feedback can be constructed.

**Key words** Nonlinear systems, Morgan's problem, structural decomposition, strings of integrators.

**孙振东** 男, 1968 年生. 1990 年毕业于青岛海洋大学应用数学系, 1993 年在厦门大学系统科学系获硕士学位, 1996 年于北京航空航天大学第七研究室获博士学位. 目前在清华大学自动化系从事博士后研究. 感兴趣的研究领域包括非线性控制系统, 混合动态系统及离散事件系统.

**夏小华** 北京航空航天大学第七研究室教授, 博士生导师. 曾访问德国 Stuttgart 大学, 法国 Nantes 大学以及新加坡国立大学. 主要研究方向包括非线性反馈控制, 采样系统等.