第24卷 第4期
1998年7月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 4
Jul., 1998

简 报

非有理传递函数矩阵4-块 H^∞ 控制问题的一种设计方法

鹿 浩 王志宏 方华京 黄心汉
(华中理工大学自动控制工程系 武汉 430074)

关键词 非有理传递函数矩阵，H^∞ 控制，4-块问题.

1 引言

无限维系统 H^∞ 控制的研究虽然在 H^∞ 控制理论发展的早期就已开始，但其结果至今尚很不完善. 利用斜 Toeplitz 算子方法和 Krein 空间方法直接对无限维系统进行 H^∞ 优化设计，所获得的控制器一般情况下是无限维的，通常要进一步进行有限维近似. 另外，对无限维系统进行互质分解也是比较烦琐的工作. 文献[1]利用分解对象为其有限维近似(可能不稳定)与稳定的有限维和无限维系统之和，将非有理传递函数矩阵的混合灵敏度问题转化为以其近似有理传递涵数矩阵为对象的相应问题. 该方法的特点是对权函数和对象的要求比较弱，避免了对无限维对象进行互质分解，且可直接获得有理次优控制器及其性能指标估计公式. 本文试图将该方法推广到一类非有理传递涵数矩阵的4-块 H^∞ 控制问题，这种推广虽然不可能适用于所有的 H^∞ 控制问题，但它保留了上述设计特点，仍然不失为非有理传递函数矩阵4-块 H^∞ 控制问题的值得关注的途径.

2 问题的描述

设被控对象和控制器的传递函数矩阵分别为 G 和 K，$W_i, i=1,2,3,4$ 为四个有理加权函数矩阵. 本文用记号 $MS(S=L^\infty, RL^\infty, H^\infty, RH^\infty$ 等)表示以 S 中的函数为元素的矩阵的集合，假定所有矩阵均具有适当的维数，并沿用文[1]中的稳定性定义.

考虑以下4-块问题

$$\mu(G) = \inf_{\text{stab } K} \left\| \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 K \end{bmatrix} (I+GK)^{-1} \begin{bmatrix} W_1 & GW_4 \end{bmatrix} \right\|_\infty . \tag{1}$$

在 gap 度量下，$\mu(G)$ 关于对象 G 是连续的，在这一意义上问题(1)是适定的详情，请参考文献[2]. 当 $W_4=0$ 时，问题(1)成为文[1]中所讨论的混合灵敏度问题

$$\gamma(G) = \inf_{\text{stab } K} \left\| \begin{bmatrix} W_2 (I+GK)^{-1} W_1 \\ W_3 K (I+GK)^{-1} W_1 \end{bmatrix} \right\|_\infty . \tag{2}$$

收稿日期 1997-05-16

我们需要的假设与文[1]中的假设基本相同.

假设 1. 对象的传递函数矩阵可分解为

$$G = G_f + G_S = G_f + G_2 + G_1. \tag{3}$$

其中 $G_f \in MRL^\infty$, $G_S \in MH^\infty$ 且严格真, $\| G_S \|_\infty$ 充分小, $G_2 \in MRH^\infty$, $G_1 \in MH^\infty$.

假设 2. $W_3, W_3^{-1} \in MRH^\infty$, W_1, W_2, W_4 真.

假设 3. W_3, W_3^{-1} 稳定, W_3^{-1} 严格真, W_1, W_2, W_4 真, 且 $W_1^{-1} \in MRL^\infty$.

本文目的就是通过对 G_f 求解与(1)相应的次优解,来对 G 求解与(1)相应的次优解.

3 主要结果

当 G 满足假设 1 时,可得以下与文[1]引理Ⅲ.1 类似的结果

引理 1. 设 G 满足假设 1, $\tilde{K} = W_3 K$, $\tilde{G} = G W_3^{-1}$, 则当 $W_i, i=1,2,3,4$ 满足假设 2 或假设 3 之一时, K 稳定 G 当且仅当 $\tilde{K}$ 稳定 $\tilde{G}$. 在假设 2 下 K 是(严格)真的当且仅当 $\tilde{K}$ 是(严格)真的,在假设 3 下 K 总是严格真的而 $\tilde{K}$ 是真的.

引理 1 的证明与文[1]的引理Ⅲ.1 证明类似,这里省略. 设 K_f 是任意使 G_f 稳定的有理控制器,记 K_f 对 G_f 达到的性能指标为

$$\mu(G_f, K_f) = \left\| \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 K_f \end{bmatrix} (I + G_f K_f)^{-1} [W_1 \quad G_f W_4] \right\|_\infty, \tag{4}$$

$$\gamma(G_f, K_f) = \left\| \begin{bmatrix} W_2 (I + G_f K_f)^{-1} W_1 \\ W_3 K_f (I + G_f K_f)^{-1} W_1 \end{bmatrix} \right\|_\infty. \tag{5}$$

对于多变量系统的 4-块问题(1),在前面所述的适当条件和分解下,可根据以下结论设计有限维次优控制器.

命题 1. 设 G 满足假设 1, $W_i = 1,2,3,4$ 满足假设 2 或假设 3, 且选取 W_4 使 $(G_f W_4)^{-1} \in MRL^\infty$, 则当 K_f 稳定 G_f 并达到指标 $\mu(G_f, K_f)$, $\gamma(G_f, K_f)$, 且 $\| G_1 W_3^{-1} \|_\infty \| W_1^{-1} \|_\infty \gamma(G_f, K_f) < 1$ 时, 有理控制器 $K = K_f (I - G_2 K_f)^{-1}$ 稳定 G 且达到性能指标

$$\mu(G, K) = \left\| \begin{bmatrix} I & -W_2 G_2 W_3^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 K_f \end{bmatrix} (I + G_f K_f)^{-1} F [W_1 \quad G W_4] \right\|_\infty. \tag{6}$$

其中 $F = (I + G_1 K_f (I + G_f K_f)^{-1})^{-1}$, 且有上界

$$\mu(G,K) \le \frac{1 + \| W_2 G_2 W_3^{-1} \|_\infty}{1 - \| G_1 W_3^{-1} \|_\infty \| W_1^{-1} \|_\infty \gamma(G_f, K_f)} \Big[\| W_1^{-1} \|_\infty \| W_4 \|_\infty \| G_S \|_\infty \gamma(G_f, K_f) + \left(\| W_1 \|_\infty \| W_1^{-1} \|_\infty + \| G_f W_4 \|_\infty \| (G_f W_4)^{-1} \|_\infty \right) \mu(G_f, K_f) \Big]. \tag{7}$$

证明.(限于篇幅,这里省略证明,感兴趣的读者可与作者联系).

说明 1. K_f 可按有理传递函数矩阵的 4-块问题次优解的求解方法设计, $\gamma(G_f, K_f)$ 是按 4-块问题设计的 K_f 所达到的混合灵敏度指标.

说明 2. 文[1]的引理Ⅲ.3 可作为命题 1 当 $W_4 = 0$ 时的特殊结果,此时 $\mu(G_f, K_f) = \gamma(G_f, K_f)$ 且含有 W_4 的项自动消失.

如果选取 $G_2 = 0$,则可得到较低阶的控制器,且由命题 1 有下面的推论.

推论 1. 设 G 满足假设 1, $W_i = 1,2,3,4$ 满足假设 2 或假设 3, 且 $(G_f W_4)^{-1} \in MRL^\infty$,

则当 K_f 稳定 G_f 并达到指标 $\mu(G_f,K_f)$，$\gamma(G_f,K_f)$ 且 $\|G_SW_3^{-1}\|_\infty\|W_1^{-1}\|_\infty\gamma(G_f,K_f)<1$ 时，有理控制器 K_f 稳定 G 且达到性能指标

$$\mu(G,K_f)=\left\|\begin{bmatrix}W_2\\W_3K_f\end{bmatrix}(I+G_fK_f)^{-1}F[W_1\quad GW_4]\right\|_\infty. \tag{8}$$

其中 $F=(I+G_SK_f(I+G_fK_f)^{-1})^{-1}$，且有上界

$$\mu(G,K_f)\le\frac{1}{1-\|G_SW_3^{-1}\|_\infty\|W_1^{-1}\|_\infty\gamma(G_f,K_f)}\Big[\|W_1^{-1}\|_\infty\|W_4\|_\infty\|G_S\|_\infty\gamma(G_f,K_f)+$$
$$(\|W_1\|_\infty\|W_1^{-1}\|_\infty+\|G_fW_4\|_\infty\|(G_fW_4)^{-1}\|_\infty)\mu(G_f,K_f)\Big]. \tag{9}$$

同样，文[1]中的引理 Ⅲ.4 是推论 1 在 $W_4=0$ 时的特例，此时含 W_4 的项自动消失.

4　结论

基于以上讨论可见，求非有理传递函数矩阵 4-块问题(1)的次优解在一定条件下可以转化为求一个与有理传递函数矩阵 G_f 相应的 4-块问题次优解 K_f. 当 $G=G_S+G_S$ 的分解使 $\|W_2G_SW_3^{-1}\|_\infty$ 充分小，且相应的有限维 4-块问题次优解性能指标充分小时，有理控制器 $K=K_f$ 或 $K=K_f(I-G_2K_f)^{-1}$ 可使 G 达到预期的性能指标. 与斜 Toeplitz 算子方法相比，这一途径具有对被控对象的要求弱的多、不需作互质分解、可利用有限维情形的成熟方法以及不需对控制器作有限维估计等特点.

参　考　文　献

1　Curtain R, Zhou Y. A Weighted Mixed-Sensitivity H^∞-control Design for Irrational Tansfer Matrices. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1996, **41**(9):1312—1321

2　Englehart M J, Smith M C. A four-block problem for H^∞ Design: properties and applications. In: Proc. 29th IEEE CDC, Honolulu, Hawaii, 1990:2401—2406

A FOUR-BLOCK H^∞ CONTROL DESIGN FOR IRRATIONAL TRANSFER MATRICES

LU HAO　WANG ZHEHONG　FANG HUAJING　HUANG XINHAN

(*Dept. of Autom. Contr. Eng., Huazhong Univ. of Sci. & Tech., Wuhan* 430074)

Key words　Irrational transfer matrices, H^∞ control, 4-block problem.