

非线性系统的多模态 ARMAX 模型

——一种基于插值理论的模型¹⁾

周超俊 蒋慰孙

(华东理工大学自动化研究所 上海 200237)

藤井省三

(名古屋大学情报工学科 日本〒 464-01)

摘 要

基于多元多项式插值理论,提出了非线性系统的多模态模型,分别考虑了非平衡和平衡两种方式下的多模态模型. 在大范围内这两种模型均有较好的精度,特别是平衡式多模态模型具有便于现场辨识和工程应用的特点. 仿真结果表明了这种模态模型的有效性.

关键词: 非线性系统,多元多项式插值,多模态模型.

1 引言

非线性系统分析与综合的方法很多. 如传统的线性化技术,即基于非线性系统在某一工作点上的线性化模型,采用线性控制理论的方法来设计线性控制系统. 其优点是简单,且所得到结果是闭环形式的,其缺陷是当非线性系统偏离标称工作点较大时,系统的性能可能恶化,甚至变得不稳定. 又如基于正交多项式的方法^[1],这种方法的优点是精度高,计算量小,缺点是系统中的物理变量、参数很有可能在正交变换中失去意义,而且所得到的结果通常也难以写成闭环解的形式. 如何寻找一种分析和综合方法,使得线性控制理论可以继续沿用,而其结果又能在较大范围内有效是一项很有意义的工作.

2 离散非线性系统的多模态 ARMAX 模型

下面给出多元多项式插值方面的两个引理.

引理 1^[2]. 设 D 是 n 维欧氏空间 R^n 中的一个超立方体. 在 D 中取插值节点组

$$(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i), \quad (1)$$

$$x_i^0 < x_i^1 < \dots < x_i^m, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

1) 国家教委留学生工作资助费和国家自然科学基金资助.
本文于 1993 年 2 月 24 日收到

假设插值节点组 (1) 是适定的, 且令

$$\alpha(x_i) = (x_i - x_i^0)(x_i - x_i^1) \cdots (x_i - x_i^{m_i}), \quad (3)$$

则非线性函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 Lagrange 插值公式为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \prod_{j=1}^n \frac{\alpha(x_j)}{\alpha'(x_j^i)(x_j - x_j^i)} f(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \cdots, x_n^{i_n}). \quad (4)$$

与一元插值不同, 插值结点组 (1) 不是任意可选取的, 它必须满足以下的引理:

引理 2^[2]. 插值结点组 $(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \cdots, x_n^{i_n})$ 是 P 的适定结点组的充分必要条件是它不在 P 中的任何一条代数曲线上. P 是多项式 $l_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所支成的实线性空间.

引理 2 中, 所谓适定结点组的意义在于采用这样的结点组插值多项式 (4) 有唯一解. $l_{i_1, i_2, \dots, i_n}(\cdot)$ 由下式定义:

$$l_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{\alpha(x_j)}{\alpha'(x_j^i)(x_j - x_j^i)}, \quad (5)$$

$$i_j = 0, 1, \cdots, m_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

根据引理 2 知, 插值节点组 (1) 一定是适定的.

如式 (5) 所示的 Lagrange 插值多项式有下列性质:

性质 1^[2]. 假设 $l_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是多元函数的 Lagrange 插值多项式, 则有

$$l_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \cdots, x_n^{i_n}) = 1, \quad (6)$$

$$l_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \cdots, x_j^k, x_n^{i_n}) = 0, \quad k \neq i_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \quad (7)$$

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} l_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1. \quad (8)$$

性质 2. 假设 $(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \cdots, x_n^{i_n})$ 和 $(x_1^{i_1} + \Delta x_1^{i_1}, x_2^{i_2} + \Delta x_2^{i_2}, \cdots, x_n^{i_n} + \Delta x_n^{i_n})$ 分别是 R^n 中超立方体 D 中的适定插值节点组, $l_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $l'_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 分别是基于这两个插值节点组的多元函数的 Lagrange 插值多项式, 那么

$$l_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = l'_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1 + \Delta x_1^{i_1}, x_2 + \Delta x_2^{i_2}, \cdots, x_n + \Delta x_n^{i_n}). \quad (9)$$

根据式 (3), (5) 容易证明此性质, 证略.

基于上述引理和性质, 分析 SISO 的离散非线性系统

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \cdots, y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, \cdots, u_{k-n}). \quad (10)$$

对于如图 1 所示的结点组

$$\begin{aligned} & (y_{k-1}^{i_1}, y_{k-2}^{i_2}, \cdots, y_{k-n}^{i_n}, u_{k-n+1}^{i_{2n+1}}, \cdots, u_{k-1}^{i_{2n+1}}), \\ & (y_{k-1}^{i_1} + \Delta y_{k-1}^{i_1}, \cdots, y_{k-n}^{i_n} + \Delta y_{k-n}^{i_n}, u_{k-n+1}^{i_{2n+1}} + \Delta u_{k-n+1}^{i_{2n+1}}, \cdots, u_{k-1}^{i_{2n+1}} + \Delta u_{k-1}^{i_{2n+1}}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$i_j = 0, 1, \cdots, m_j, \quad j = 1, 2, \cdots, 2n+1.$$

根据引理 1, 可以分别写出非线性系统 (10) 相对插值节点组 (11) 的 Lagrange 插值多项式, 即

$$y_k = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{i_{2n+1}=0}^{m_{2n+1}} l_{i_1, i_2, \dots, i_{2n+1}}(\cdot) f(y_{k-1}^{i_1}, \cdots, u_{k-n}^{i_{2n+1}}), \quad (12)$$

$$y_k + \Delta y_k = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{i_{2n+1}=0}^{m_{2n+1}} l'_{i_1, i_2, \dots, i_{2n+1}}(\cdot) f(y_{k-1}^{i_1} + \Delta y_{k-1}^{i_1}, \cdots, u_{k-n}^{i_{2n+1}} + \Delta u_{k-n}^{i_{2n+1}}). \quad (13)$$

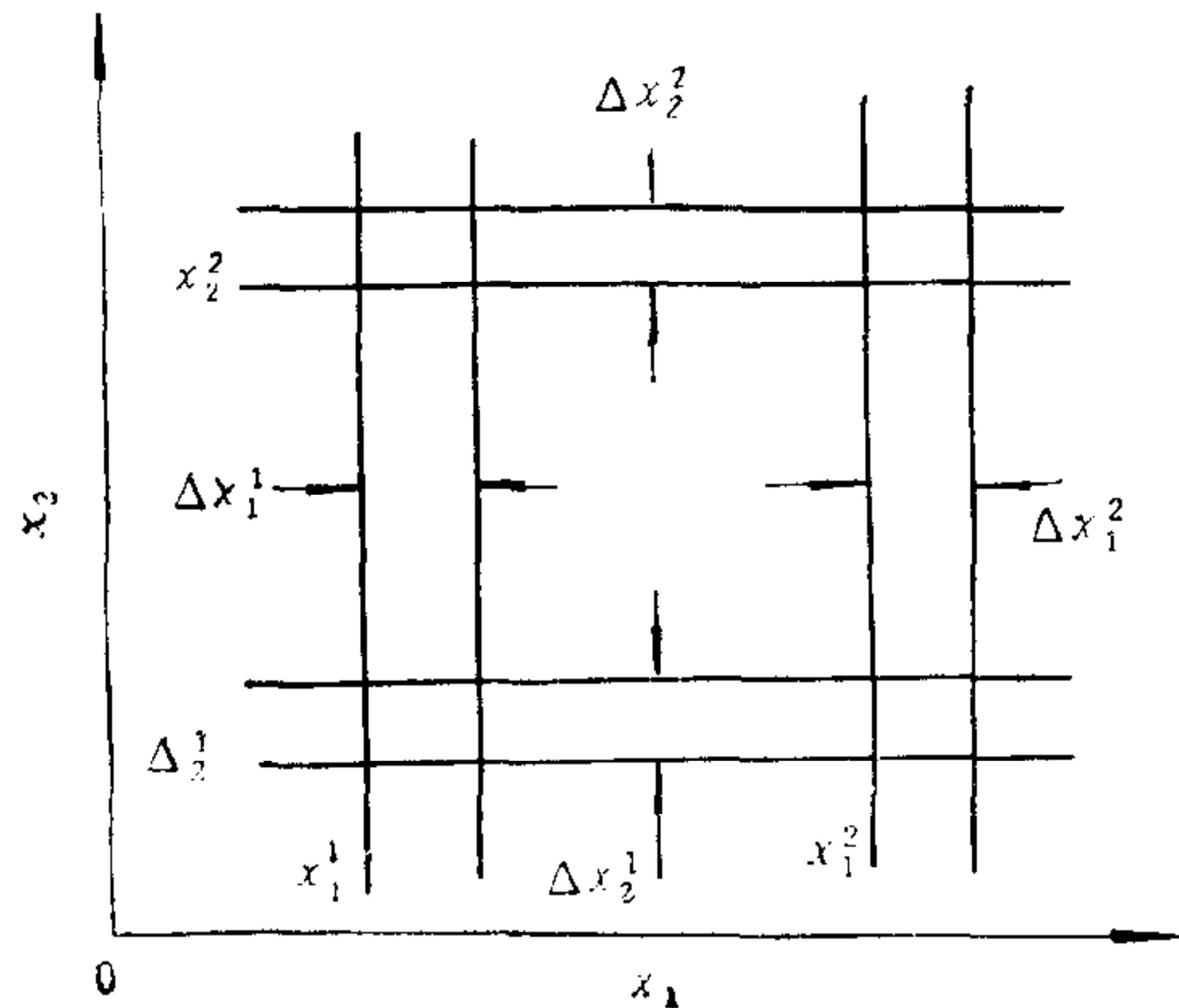


图 1 插值节点组

为简便起见,省略了 $l_{i_1 i_2 \dots i_{2n+1}}(\cdot)$ 和 $l'_{i_1 i_2 \dots i_n}(\cdot)$ 中的自变量符号. 根据性质 2 有

$$l_{i_1 i_2 \dots i_{2n+1}}(\cdot) = l'_{i_1 i_2 \dots i_{2n+1}}(\cdot). \quad (14)$$

式(12)减去式(13)得到

$$\Delta y_k = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \dots \sum_{i_{2n+1}=0}^{m_{2n+1}} l_{i_1 i_2 \dots i_{2n+1}}(\cdot) [f(y_{k-1}^{i_1} + \Delta y_{k-1}^{i_1}, \dots) - f(y_{k-1}^{i_1}, \dots)], \quad (15)$$

记 Δ 是所有 $|\Delta y_k^j|, |\Delta u_k^j|$ 中的最大值, 则当 $|\Delta|$ 较小时, 式(15)可近似为

$$\begin{aligned} \Delta y_k = & \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \dots \sum_{i_{2n+1}=0}^{m_{2n+1}} l_{i_1 i_2 \dots i_{2n+1}}(\cdot) \left[\frac{\partial f}{\partial y_{k-1}^{i_1}} \Delta y_{k-1}^{i_1} + \frac{\partial f}{\partial y_{k-1}^{i_2}} \Delta y_{k-1}^{i_2} \right. \\ & \left. + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_{k-n}^{i_{2n+1}}} \Delta u_{k-n}^{i_{2n+1}} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

式中

$$\frac{\partial f}{\partial y_{k-1}^{i_j}} = \frac{\partial f}{\partial y_{k-j}^{i_j}} \Big|_{y_{k-j}} = y_{k-j}^{i_j}, \quad \Delta y_{k-1}^{i_j} = y_{k-1}^{i_j} - y_{k-2}^{i_j}. \quad (17)$$

根据式(8),(12)有

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \dots \sum_{i_{2n+1}=0}^{m_{2n+1}} l_{i_1 i_2 \dots i_{2n+1}}(\cdot) \left[\Delta y_k^{i_1 i_2 \dots i_{2n+1}} - \frac{\partial f}{\partial y_{k-1}^{i_1}} \Delta y_{k-1}^{i_1} \right. \\ & \left. - \frac{\partial f}{\partial y_{k-1}^{i_2}} \Delta y_{k-1}^{i_2} - \dots - \frac{\partial f}{\partial u_{k-n}^{i_{2n+1}}} \Delta u_{k-n}^{i_{2n+1}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\Delta y_k^{i_1 i_2 \dots i_{2n+1}} = y_k - f(y_{k-1}^{i_1}, y_{k-2}^{i_2}, \dots, u_{k-n}^{i_{2n+1}}). \quad (19)$$

式(18)表明非线性系统的动态特性可以用若干个工作点上的线性化模型之和来加以近似, 而这些线性化模型则是非线性系统在结点组(11)处的线性化模型. 称模型(18)是非线性系统(10)的多模态 ARMAX 模型.

在选取插值节点组(11)时, 不能把它们全部选在非线性系统(10)的平衡点上, 否则插值公式(12)中, 和式的自由度将从 $2n+1$ 变成 1, 出现奇异情况. 所以称多模态模型(18)是非线性系统(10)的非平衡式多模态模型. 除非能够精确知道非线性系统的参数和结构, 否则多模态模型是难以建立起来的.

考虑利用非线性系统(10)平衡点上的线性化模型来近似非线性系统的时变线性化模型的问题,假设非线性系统(10)的一个平衡点 (y^*, u^*) 满足

$$y_k^* = f(y_{k-p}^*, \dots, y_{k-n}^*, u_k^*, \dots, u_{k-n}^*), \quad (20)$$

在该点处,可以求得非线性系统的一个线性化模型

$$\Delta y_k^* = \frac{\partial f}{\partial y_{k-1}^*} \Delta y_{k-1}^* + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_{k-n}^*} \Delta y_{k-n}^* + \frac{\partial f}{\partial u_k^*} \Delta u_k^* + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_{k-n}^*} \Delta u_{k-n}^*, \quad (21)$$

此模型的系数将随平衡点 u_* 及设定值 r 的变化而变化. 假设闭环系统的设定值 $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, 在此区间中取若干点,记为

$$r_{\min} = r^0 < r^1 < \dots < r^N = r_{\max}. \quad (22)$$

假设对于每一个 r^i 都已经得到一个线性化模型

$$\Delta y_k^i = \frac{\partial f}{\partial y_{k-1}^i} \Delta y_{k-1}^i + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_{k-n}^i} \Delta y_{k-n}^i + \frac{\partial f}{\partial u_k^i} \Delta u_k^i + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_{k-n}^i} \Delta u_{k-n}^i, \quad (23)$$

$$i = 0, 1, \dots, N,$$

则可得到模型(21)的 Lagrange 插值公式

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i(r) \left[\Delta y_k^i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_{k-j}^i} \Delta y_{k-j}^i + \sum_{j=0}^n \frac{\partial f}{\partial u_{k-j}^i} \Delta u_{k-j}^i \right] = 0, \quad (24)$$

式中

$$\Delta y_k^i = y_k - y^i, \quad \Delta u_k^i = u_k - u^i, \quad (25)$$

$\alpha_i(r)$ 是 Lagrange 插值因子. 称模型(23)是非线性系统(10)的平衡式多模态模型.

除了 Lagrange 插值计算方法,也可以采用其它插值方法,例如分段线性内插等方法,来求得各种各样的多模态模型. 其中采用分段线性内插方法所得到的多模型具有较好的性质.

假设闭环系统的平衡点以及平衡点上的线性化模型分别如式(22),(23)所示,则分段线性内插平衡式多模态模型为

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i(r) [A^i(q^{-1}) \Delta y_k^i - B^i(q^{-1}) \Delta u_k^i] = 0, \quad (26)$$

式中

$$A^i(q^{-1}) = 1 + a_1^i q^{-1} + \dots + a_n^i q^{-n}, \quad a_j^i = -\frac{\partial f}{\partial y_{k-j}^i}, \quad (27)$$

$$B^i(q^{-1}) = b_0^i + b_1^i q^{-1} + \dots + b_n^i q^{-n}, \quad b_j^i = +\frac{\partial f}{\partial u_{k-j}^i},$$

$$i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, n.$$

内插因子 $\alpha_i(r)$ 除了满足性质 1, 2 以外,还满足

$$\alpha_i(r) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (28)$$

3 仿真例子

考虑双线性系统

$$y_k = 0.8y_{k-1} + 0.1y_{k-2}u_k + u_{k-1}. \quad (29)$$

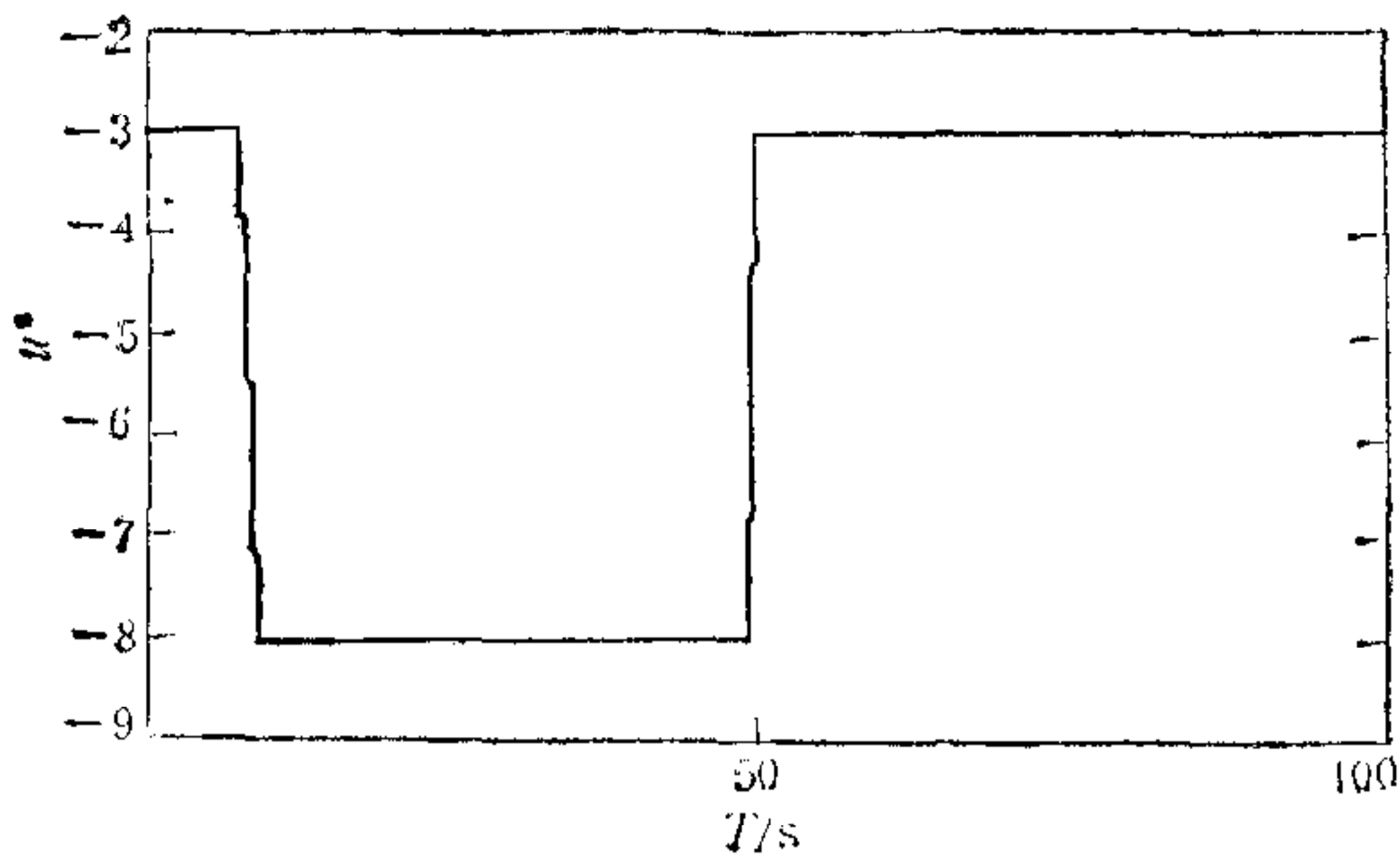


图2 u^* 的变化曲线

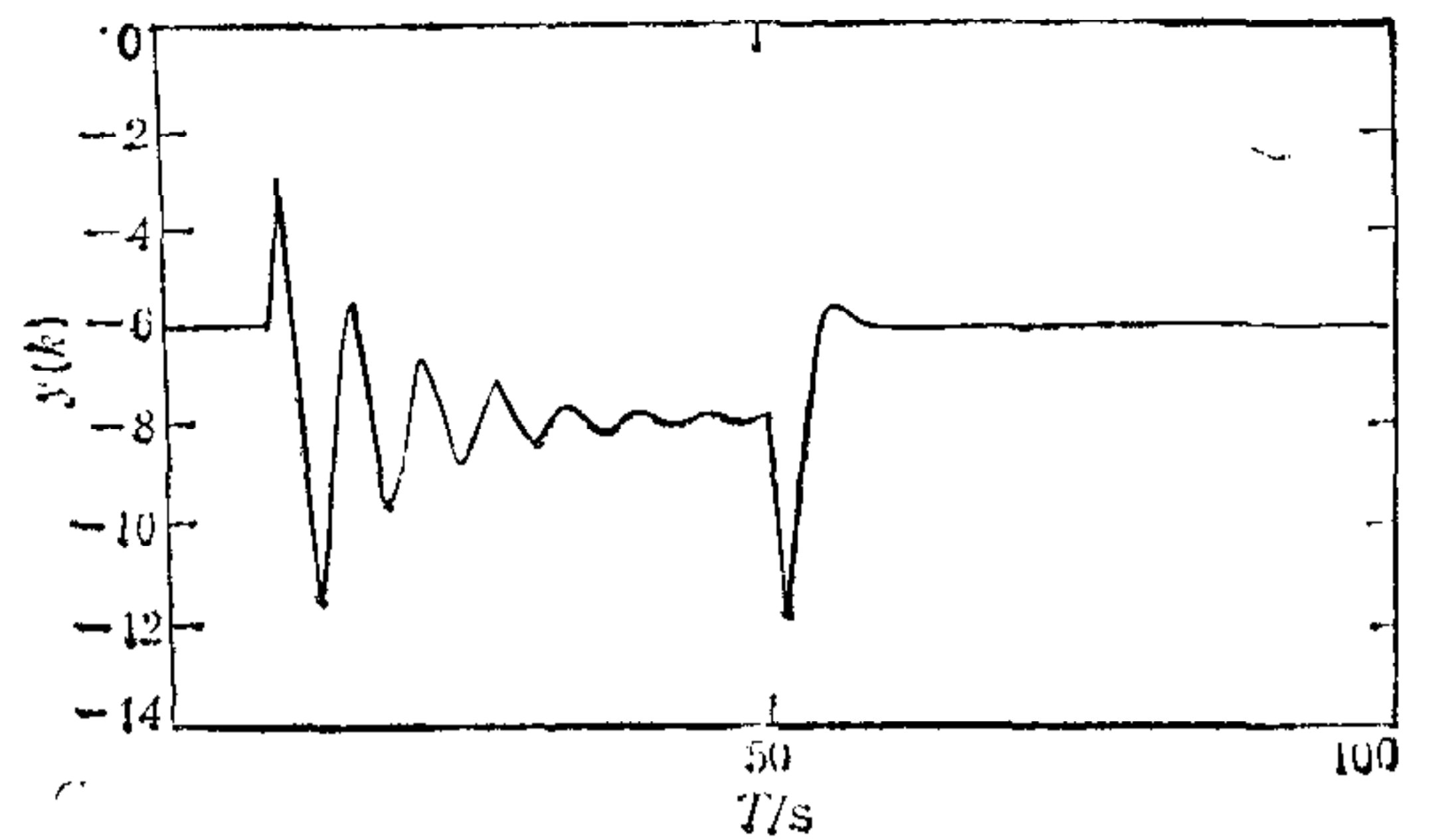


图3 模型的输出曲线

假设选取插值组为

$$(y_{k-1}^{i_1}, y_{k-2}^{i_2}, u_k^{i_3}, u_{k-1}^{i_4}), \quad i_1, i_2, i_3, i_4 = \{0, 1\}, \quad (30)$$

则非平衡式多模态模型为

$$y_k - y_k^* = 0.8 \sum_{j=0}^1 \frac{\alpha(y_{k-1}^j)}{\alpha'(y_{k-1}^j)(y_{k-1}^j - y_{k-1}^i)} \Delta y_{k-1}^j + \sum_{i=0}^1 \frac{\alpha(u_k^i)}{\alpha'(u_k^i)(u_k^i - u_k^j)} \Delta u_k^i \quad (31)$$

$$+ 0.1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{\alpha(y_{k-2}^j)}{\alpha'(y_{k-2}^j)(y_{k-2}^j - y_{k-2}^i)} \cdot \frac{\alpha(u_k^i)}{\alpha'(u_k^i)(u_k^i - u_k^j)} [u_k^i \Delta y_{k-2}^j + y_{k-2}^j \Delta u_k^i],$$

式中的各符号的意义如式(17),(19)所定义。

进一步考虑平衡式多模态模型。设闭环系统的设定值为 r , 有两个平衡点: $-3, -8$ 。与之对应的有 $(y^1, u^1) = (-6, -3)$, $(y^2, u^2) = (-8, -8)$ 。在这两个工作点上的线性化模型分别为

$$\Delta y_k^1 = 0.8 \Delta y_{k-1}^1 + 0.1 \times (-3) \Delta y_{k-2}^1 + 0.1 \times (-6) \Delta u_k^1 + \Delta u_{k-1}^1. \quad (32)$$

$$\Delta y_k^2 = 0.8 \Delta y_{k-1}^2 + 0.1 \times (-8) \Delta y_{k-2}^2 + 0.1 \times (-8) \Delta u_k^2 + \Delta u_{k-1}^2, \quad (33)$$

则平衡式多模态模型为

$$y_k = 0.8 y_{k-1} - (0.3\alpha_1 + 0.8\alpha_2) y_{k-2} - (0.6\alpha_1 + 0.8\alpha_2) u_k + u_{k-1} - (1.8\alpha_1 + 6.4\alpha_2). \quad (34)$$

假设闭环系统是无余差的, 则平衡时

$$y^* = r, \quad (35)$$

所以可以算得

$$u^* = \frac{0.2r}{0.1r + 1}, \quad (36)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} (8 + r) = \frac{1}{4} \left(\frac{1.6 + 0.2u^*}{0.2 - 0.1u^*} \right), \quad (37)$$

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1. \quad (38)$$

在双线性系统(29)处于平衡点1时,

让 u^* 按照图2所示的方式变化, 结果多模态模型的输出如图3所示。在相同条件下, 非

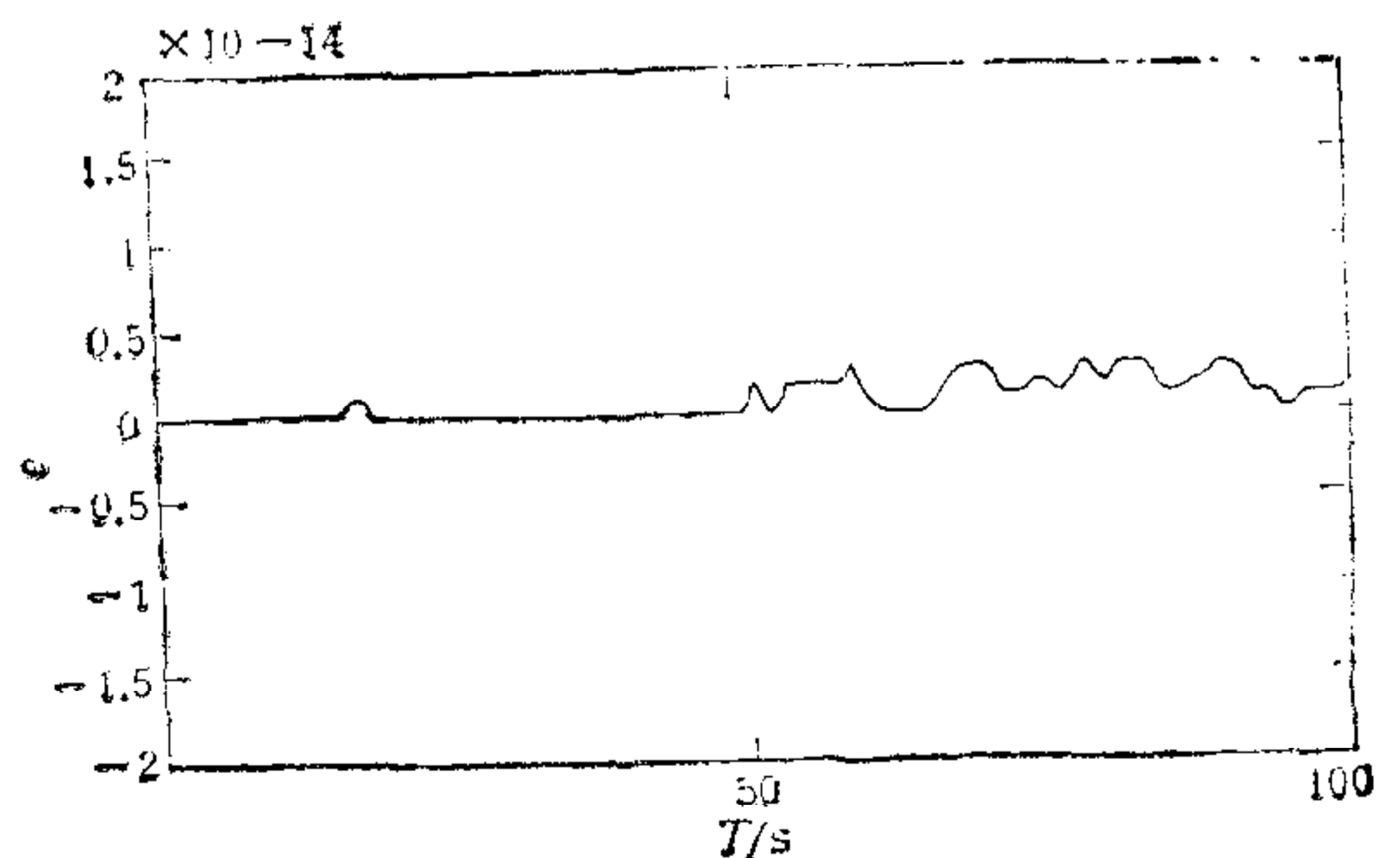


图4 模型与对象输出的偏差曲线

线性系统的输出的偏差如图 4 所示, 偏差几乎为零。因此多模态模型能够很好地近似原非线性系统。

4 结束语

本文利用多元多项式的插值理论, 讨论了非线性系统的多模态建模问题, 得到了非平衡式和平衡式两类多模态模型。其中平衡式多模态模型虽然关于 y_k 和 u_k 是线性变化的, 但它即随着设定值而非线性变化。因而在大范围内精度较高。由于平衡式多模态模型是非线性系统多个工作点上的线性化模型加权组合而成的, 所以可以把它看成是传统线性化技术的一个推广。线性控制理论可以继续沿用。这是一个很重要的特征。通常非线性系统在某个工作点上的线性化模型总是可以辨识的。因此, 平衡式多模态模型特别便于工程应用。采用分段线性内插方法的多模态模型由于其插值因子总是大于或等于零, 所以有可能把区间多项式和鲁棒控制理论应用于多模态对象的控制系统的设计问题中。同时, 可以计算的插值因子赋予区间多项式中的不确定因子于一种明确的物理意义。

基于多模态模型所设计的控制器, 由于能够自动补偿系统工作点变化所造成的影响, 因此有很好性能, 如文 [3] 所给出的结果那样。

与平衡式多模态模型相比, 非平衡式多模态模型具有较高精度, 但是由于非平衡式多模态模型需要用到非线性系统工作点上的动态线性化模型, 所以除非精确了解非线性系统的模型, 否则非平衡式多模态模型是难以工程应用的。但是推导非平衡多模态模型的方法和概念对于建立平衡式多模态模型是有指导意义的。

本文的结论虽然是针对 SISO 系统的, 但是不难将它们推广到 MIMO 系统。关于如何证明多模态模型的收敛性等问题有待于进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 王行愚, 蒋慰孙. 块脉冲算子及其应用. 华东化工学院出版社, 1989.
- [2] 王仁宏, 梁学章. 多元函数逼近. 科学出版社, 1988, 36—52.
- [3] 周超俊, 蒋慰孙, 藤井省三. 非线性系统的多模态 ARMAX 模型及其应用. 华东化工学院学报, 1992, 18 (增刊): 124—129.

A MULTIPLE MODE ARMAX MODEL OF NONLINEAR SYSTEMS—A KIND OF MODEL BASED ON INTERPOLATION THEORY

ZHOU CHAOJUN JIANG WEISUN

(East China University of Science and Technology Shanghai 200237)

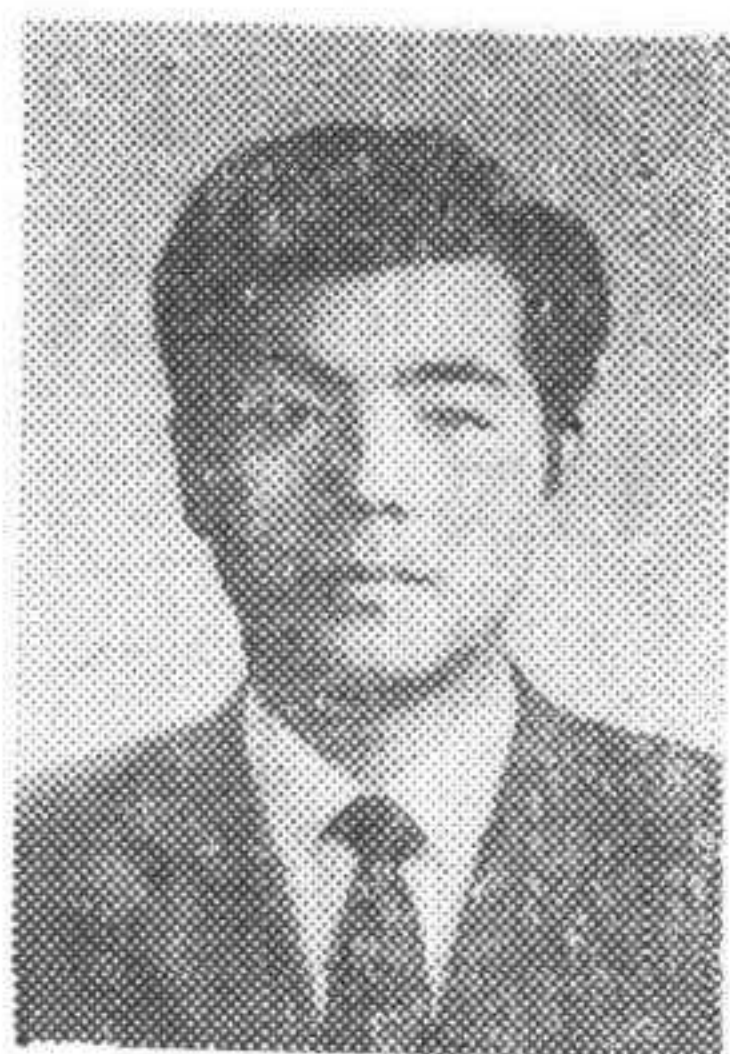
FUJII

(Nagoya University (Japan) Faculty of Engineering Department of Information, Chikusa-Ku Furoryo Nagoya City 464-01)

ABSTRACT

In this paper, based on the interpolation theory, a multiple mode model of nonlinear systems is developed. The MM models under non-equilibrium and equilibrium are considered. Both of them are much more accurate than the traditional linearized model of nonlinear systems at one operating point. Especially the MM model under equilibrium is convenient to be identified and applied. The simulation results have shown the effectiveness of the MM model developed in this paper.

Key words: Nonlinear system, multiple mode model, interpolation of multi-variable polynomial.



周超俊 1984年本科毕业于华东化工学院,1987年硕士毕业于华东化工学院,1992年博士毕业于华东化工学院自动控制与电子工程系。1989年—1990年留学于日本名古屋大学信息工程系。主要研究方向:非线性系统的多模型方法,故障检测与诊断,智能控制。

蒋慰孙 照片、简介见本刊第18卷第1期。



藤井省三 1960年博士毕业于名古屋大学机械系。任助教,副教授等职。1963年至1965年在瑞士联邦理工大学任客座研究员。1970年任名古屋工业大学教授。1986年任名古屋大学教授至今。主要研究方向为自适应控制理论及其应用。

1995年国际神经网络与信号处理学术大会

征文通知

由中国南京东南大学和加拿大蒙特利尔康科迪亚大学联合组织,中国电子学会电路与系统学会、IEEE 上海分会及 IEEE 蒙特利尔分会共同发起,IEEE 电路与系统学会和 IEEE 信号处理学会合办,国家科学技术委员会、国家教育委员会、国家自然科学基金委员会及香港王宽诚教育基金会赞助的1995年国际神经网络与信号处理学术大会将于1995年12月10日至12月13日在中国南京东南大学榴园宾馆和逸夫科技馆举行。此次大会主席由国家攀登计划重大项目“认知科学中前沿领域若干重大问题的研究”首席科学家何振亚教授担任,程序委员会主席由美国普林斯顿大学贡三元教授担任,IEEE 电路与系统学会主席陈惠开教授担任国际顾问委员会主席,并给予大会全力支持,目前已邀请16位海内外著名学者组织特邀分会。可以预见,此次大会将是我国信号与信息处理研究领域的一次盛会。本次大会将评选优秀论文10篇并在闭幕式上进行颁奖,热烈欢迎国内外学者投稿并参加会议。

(下转第153页)