

# 反馈未知闭环系统的 MRIV 法辨识

王 铨 曹大铸

(东南大学自动化研究所)

## 摘 要

本文提出了一种改进的精致辅助变量法。这种方法适合于反馈未知的闭环系统的参数估计。本文在理论上分析了此方法的一致性,并通过 Monte Carlo 仿真实验证实了方法的有效性。

**关键词**——反馈,系统辨识,辅助变量法,精致辅助变量法。

## 一、引 言

目前已有一些适合于闭环系统参数估计的 IV (辅助变量)法,如延时输入、延时输出和外部输入<sup>[1]</sup>等方法。但由于上述方法的辅助变量和输入、输出弱相关而影响了结果的精度。P. C. Young<sup>[3]</sup>和 T. Söderström, P. Stoica<sup>[2]</sup>采用了精致辅助变量 (RIV) 法对开环系统进行参数估计而得到很满意的结果。本文将 RIV 法加以改进使之适合于反馈未知的闭环系统的参数估计,称之为 MRIV 法。由于 MRIV 法的辅助变量和输入、输出强相关,因此参数估计的精度得到很大提高, Monte Carlo 仿真实验也证实了这一点。

## 二、系统模型

图 1 表示一个反馈未知的 SISO 闭环系统,  $e_k$  和  $\mu_k$  是均值为零, 方差分别为  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  的白噪声, 外部输入  $\gamma_k$  是平稳过程,  $\gamma_k$ ,  $e_k$  和  $\mu_k$  都是相互独立的。

图 1 中

$$\begin{aligned} A^*(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a^*} z^{-n_a^*}, & B^*(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b^*} z^{-n_b^*}, \\ F(z^{-1}) &= f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n_f} z^{-n_f}, & C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}, \\ D(z^{-1}) &= 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d}, & G(z^{-1}) &= 1 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n_g} z^{-n_g}, \\ H(z^{-1}) &= 1 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{n_h} z^{-n_h}. \end{aligned}$$

其中  $z^{-1}$  是后移算子 ( $z^{-1}x_k = x_{k-1}$ )。这里假定  $A^*(z^{-1})$  和  $B^*(z^{-1})$  是互质的。在辨识中一般用  $n_a$  和  $n_b$  代替  $n_a^*$  和  $n_b^*$ , 即用  $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}$

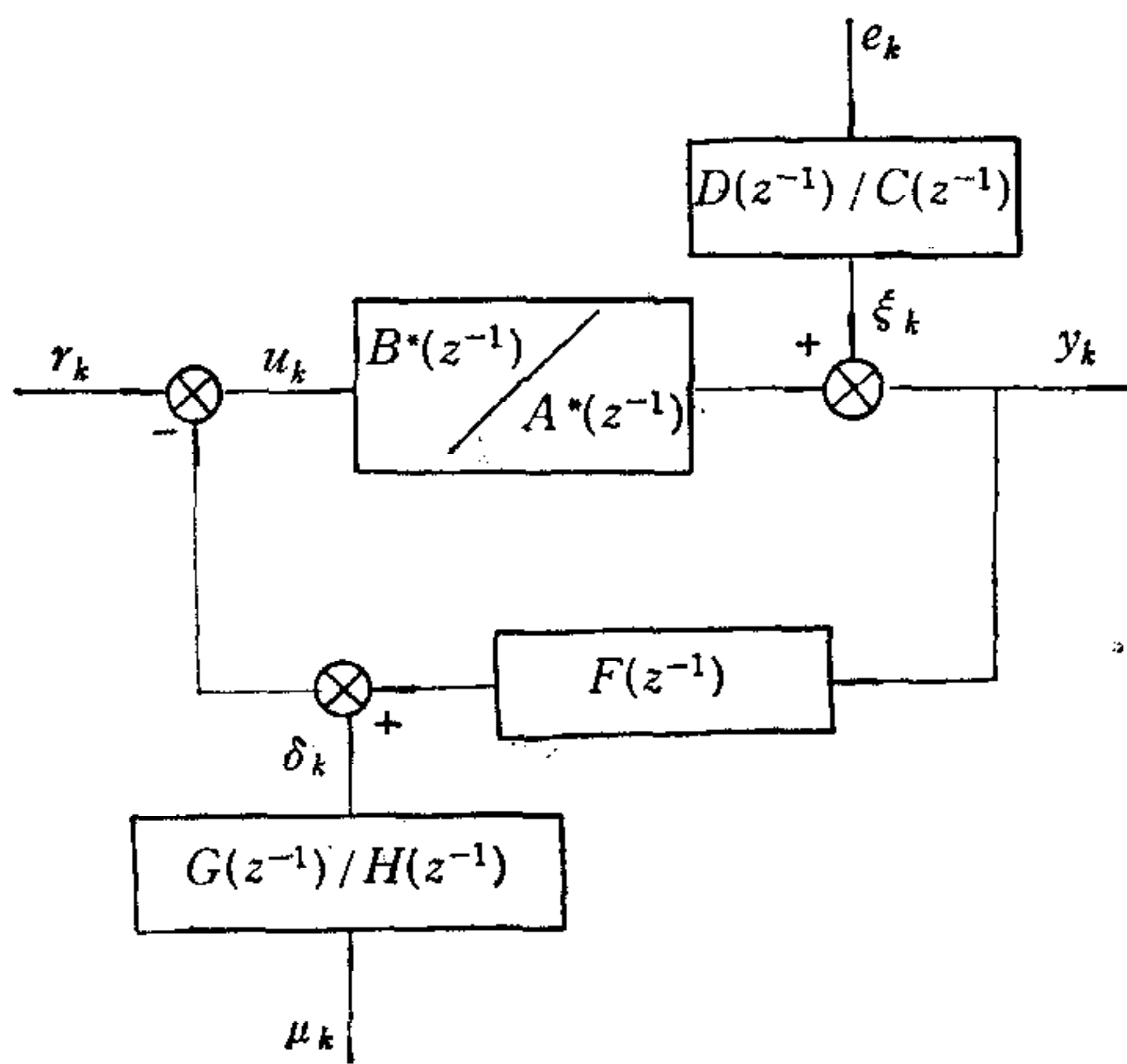


图1 SISO 闭环系统

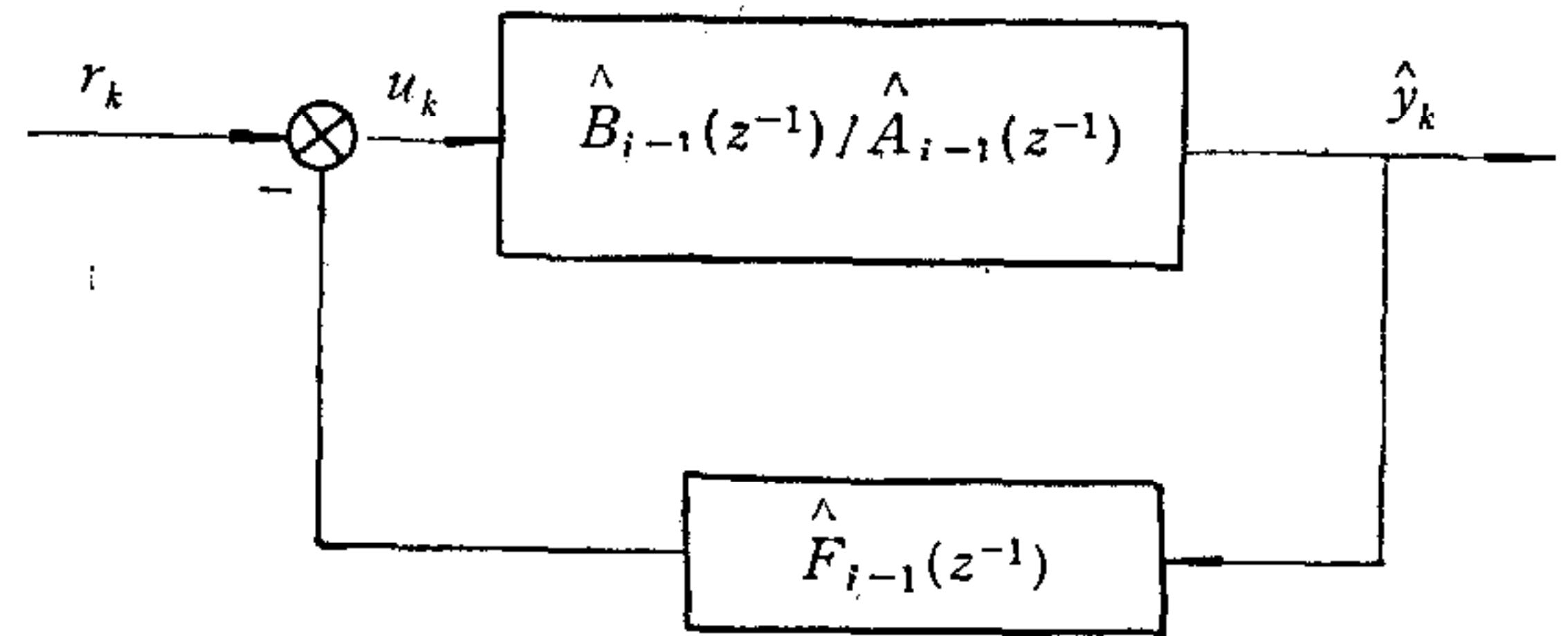


图2 闭环系统辅助模型

和  $B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}$ 。为了避免零极点对消以确保参数估计的唯一性，以下条件必须满足： $n_a \geq n_a^*$ ， $n_b \geq n_b^*$ ， $\min(n_a - n_a^*, n_b - n_b^*) = 0$ ，即对  $n_a$  与  $n_b$  二者必须确知其一。由图 1 得系统方程和反馈回路方程如下：

$$y_k = \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})} u_k + \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} e_k = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u_k + \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} e_k, \quad (1a)$$

$$r_k - u_k = F(z^{-1}) y_k + \frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} \mu_k. \quad (1b)$$

式 (1a) 和 (1b) 中  $y_k$  和  $u_k$  分别是系统的输出和输入。

由 (1a) 和 (1b) 得

$$u_k = \frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})} r_k - \frac{F(z^{-1}) A^*(z^{-1}) D(z^{-1})}{C(z^{-1}) S^*(z^{-1})} e_k - \frac{A^*(z^{-1}) G(z^{-1})}{H(z^{-1}) S^*(z^{-1})} \mu_k, \quad (2a)$$

$$y_k = \frac{B^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})} r_k + \frac{A^*(z^{-1}) D(z^{-1})}{C(z^{-1}) S^*(z^{-1})} e_k - \frac{B^*(z^{-1}) G(z^{-1})}{H(z^{-1}) S^*(z^{-1})} \mu_k. \quad (2b)$$

其中  $S^*(z^{-1}) = A^*(z^{-1}) + B^*(z^{-1}) F(z^{-1})$ 。

令  $\theta^* = [a_1 \dots a_{n_a} \ b_1 \dots b_{n_b}]^T$ ， $\omega^* = [f_0 f_1 \dots f_{n_f}]^T$ ， $\varphi_k = [-y_{k-1} \dots -y_{k-n_a} u_{k-1} \dots u_{k-n_b}]^T$ ， $\psi_k = [y_k \dots y_{k-n_f}]^T$ 。可将式 (1a) 和 (1b) 写成

$$y_k = \varphi_k^T \theta^* + \frac{A(z^{-1}) D(z^{-1})}{C(z^{-1})} e_k, \quad (3a)$$

$$r_k - u_k = \psi_k^T \omega^* + \frac{G(z^{-1})}{H(z^{-1})} \mu_k. \quad (3b)$$

### 三、MRIV 算法

为了用 IV 法对图 1 所示系统进行参数估计，一个关键的问题是需要选择适合的辅助变量。为此建立如图 2 所示的辅助模型，采用迭代方法来不断更新辅助模型参数。图

中  $\hat{A}_{j-1}(z^{-1})$ ,  $\hat{B}_{j-1}(z^{-1})$  和  $\hat{F}_{j-1}(z^{-1})$  分别是  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  和  $F(z^{-1})$  在第  $j-1$  次迭代后的估计. 由图 2 易得

$$\hat{y}_k = \frac{\hat{B}_{j-1}(z^{-1})}{\hat{A}_{j-1}(z^{-1}) + \hat{B}_{j-1}(z^{-1})\hat{F}_{j-1}(z^{-1})} r_k = \frac{\hat{B}_{j-1}(z^{-1})}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} r_k, \quad (4a)$$

$$\hat{u}_k = \frac{\hat{A}_{j-1}(z^{-1})}{\hat{A}_{j-1}(z^{-1}) + \hat{B}_{j-1}(z^{-1})\hat{F}_{j-1}(z^{-1})} r_k = \frac{\hat{A}_{j-1}(z^{-1})}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} r_k, \quad (4b)$$

其中  $\hat{S}_{j-1}(z^{-1}) = \hat{A}_{j-1}(z^{-1}) + \hat{B}_{j-1}(z^{-1})\hat{F}_{j-1}(z^{-1})$ .

倘若取得  $\hat{A}_{j-1}(z^{-1})$ ,  $\hat{B}_{j-1}(z^{-1})$  和  $\hat{F}_{j-1}(z^{-1})$  与真实系统的  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  和  $F(z^{-1})$  相近的话, 那么用  $\hat{u}_k$  和  $\hat{y}_k$  作辅助变量就会得到很满意的结果, 因为  $\hat{u}_k$  和  $u_k$ ,  $\hat{y}_k$  和  $y_k$  强相关, 而  $\hat{u}_k$ ,  $\hat{y}_k$  和  $e_k$ ,  $\mu_k$  不相关.

对 (3a) 和 (3b) 式分别取辅助变量  $\mathbf{z}_k$  和  $\mathbf{x}_k$

$$\mathbf{z}_k = [-\hat{y}_{k-1} \cdots -\hat{y}_{k-n_a} \hat{u}_{k-1} \cdots \hat{u}_{k-n_b}]^T, \quad (5a)$$

$$\mathbf{x}_k = [\hat{y}_k \cdots \hat{y}_{k-n_f}]^T. \quad (5b)$$

假定  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{z}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T$  和  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \boldsymbol{\psi}_k^T$  非奇异, 得 IV 法的参数估计

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{z}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{z}_k y_k \right], \quad (6a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \boldsymbol{\psi}_k^T \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k (r_k - u_k) \right]. \quad (6b)$$

下面介绍 MRIV 的迭代——递推算法. 考虑在第  $i$  次迭代中的第  $k$  次采样瞬间, 假定:  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = [\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_{n_a} \hat{b}_1 \cdots \hat{b}_{n_b}]^T$ ,  $\hat{\boldsymbol{W}}_k = [\hat{f}_0 \hat{f}_1 \cdots \hat{f}_{n_f}]^T$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  和  $\hat{\boldsymbol{W}}_k$  分别是  $\boldsymbol{\theta}^*$  和  $\boldsymbol{\omega}^*$  的估计值, 我们给出如下递推公式:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} - P_{k-1} \mathbf{z}_k^* [\hat{\sigma}_1^2 + \boldsymbol{\varphi}_k^{*T} P_{k-1} \mathbf{z}_k^*]^{-1} [\boldsymbol{\varphi}_k^{*T} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} - y_k], & (7a) \\ P_k = P_{k-1} - P_{k-1} \mathbf{z}_k^* [\hat{\sigma}_1^2 + \boldsymbol{\varphi}_k^{*T} P_{k-1} \mathbf{z}_k^*]^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k^{*T} P_{k-1}, & (7b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{W}}_k = \hat{\boldsymbol{W}}_{k-1} - Q_{k-1} \mathbf{x}_k^* [\hat{\sigma}_2^2 + \boldsymbol{\psi}_k^{*T} Q_{k-1} \mathbf{x}_k^*]^{-1} [\boldsymbol{\psi}_k^{*T} \hat{\boldsymbol{W}}_{k-1} - r_k + u_k], & (8a) \\ Q_k = Q_{k-1} - Q_{k-1} \mathbf{x}_k^* [\hat{\sigma}_2^2 + \boldsymbol{\psi}_k^{*T} Q_{k-1} \mathbf{x}_k^*]^{-1} \boldsymbol{\psi}_k^{*T} Q_{k-1}. & (8b) \end{cases}$$

式 (7a)–(8b) 中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_k^* = [-y_{k-1}^* \cdots -y_{k-n_a}^* u_{k-1}^* \cdots u_{k-n_b}^*]^T, & (9a) \\ \mathbf{z}_k^* = [-\hat{y}_{k-1}^* \cdots -\hat{y}_{k-n_a}^* \hat{u}_{k-1}^* \cdots \hat{u}_{k-n_b}^*]^T, & (9b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi}_k^* = [y_k^{**} \cdots y_{k-n_f}^{**}]^T, & (10a) \\ \mathbf{x}_k^* = [\hat{y}_k^{**} \cdots \hat{y}_{k-n_f}^{**}]^T. & (10b) \end{cases}$$

$\hat{\sigma}_1^2$  和  $\hat{\sigma}_2^2$  分别是  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  的估计值, 也可令  $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = 1$ .  $\hat{y}_k$  和  $\hat{u}_k$  通过 (4a) 和 (4b) 求得, 星号“\*”和“\*\*”分别表示经过滤波器  $\hat{C}_{j-1}(z^{-1})/\hat{D}_{j-1}(z^{-1})\hat{A}_{j-1}(z^{-1})$  和  $\hat{H}_{j-1}(z^{-1})/\hat{G}_{j-1}(z^{-1})$  滤波的量.

因为滤波器中要用到噪声模型, 我们采用极大似然法来估计噪声模型参数. 假定:  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_k = [\hat{c}_1 \cdots \hat{c}_{n_c} \hat{d}_1 \cdots \hat{d}_{n_d}]^T$ ,  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_k = [\hat{g}_1 \cdots \hat{g}_{n_g} \hat{h}_1 \cdots \hat{h}_{n_h}]^T$ , 给出如下递推公式:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_{k-1} - \Gamma_{k-1} \mathbf{m}_k [\hat{\sigma}_1^2 + \mathbf{n}_k^T \Gamma_{k-1} \mathbf{m}_k]^{-1} [\mathbf{n}_k^T \hat{\lambda}_{k-1} - \xi_k], & (11a) \\ \Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1} \mathbf{m}_k [\hat{\sigma}_1^2 + \mathbf{n}_k^T \Gamma_{k-1} \mathbf{m}_k]^{-1} \mathbf{n}_k^T \Gamma_{k-1}, & (11b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\eta}_k = \hat{\eta}_{k-1} - \Lambda_{k-1} \mathbf{w}_k [\hat{\sigma}_2^2 + \mathbf{v}_k^T \Lambda_{k-1} \mathbf{w}_k]^{-1} [\mathbf{v}_k^T \hat{\eta}_{k-1} - \delta_k], & (12a) \\ \Lambda_k = \Lambda_{k-1} - \Lambda_{k-1} \mathbf{w}_k [\hat{\sigma}_2^2 + \mathbf{v}_k^T \Lambda_{k-1} \mathbf{w}_k]^{-1} \mathbf{v}_k^T \Lambda_{k-1}. & (12b) \end{cases}$$

其中  $\mathbf{n}_k = [-\xi_{k-1} \cdots -\xi_{k-n_c} \hat{e}_{k-1} \cdots \hat{e}_{k-n_d}]^T$ ,  $\mathbf{m}_k = [-\xi_{k-1}^* \cdots -\xi_{k-n_c}^* \hat{e}_{k-1}^* \cdots \hat{e}_{k-n_d}^*]^T$ ,  $\mathbf{v}_k = [-\delta_{k-1} \cdots -\delta_{k-n_h} \hat{\mu}_{k-1} \cdots \hat{\mu}_{k-n_g}]^T$ ,

$$\mathbf{w}_k = [-\delta_{k-1}^{**} \cdots -\delta_{k-n_h}^{**} \hat{\mu}_{k-1}^{**} \cdots \hat{\mu}_{k-n_g}^{**}]^T,$$

而

$$\xi_k = y_k - \hat{y}_k - \frac{\hat{B}_{j-1}(z^{-1})}{\hat{A}_{j-1}(z^{-1})} (u_k - \hat{u}_k), \quad \hat{e}_k = \xi_k - \mathbf{n}_k^T \hat{\lambda}_k, \quad (13a)$$

$$\delta_k = -\hat{F}_{j-1}(z^{-1})(y_k - \hat{y}_k) - (u_k - \hat{u}_k), \quad \hat{\mu}_k = \delta_k - \mathbf{v}_k^T \hat{\eta}_k. \quad (13b)$$

“\*”和“\*\*”分别表示经过滤波器  $\frac{1}{\hat{D}_{j-1}(z^{-1})}$  和  $\frac{1}{\hat{G}_{j-1}(z^{-1})}$  滤波的量。

#### 四、MRIV 法的一致性分析

在考虑  $\hat{\theta}$  的一致性时, 必须满足  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta^*$  (w. p. 1). 由 (3a) 和 (6a) 可推得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta^* + \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{z}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{z}_k \frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})} e_k \right]. \quad (14)$$

假定数据是平稳和遍历的, 则有<sup>[4]</sup>

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta^* + [E \mathbf{z}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T]^{-1} E \mathbf{z}_k \frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})} e_k \quad (\text{w. p. 1}). \quad (15)$$

因此当以下条件成立时,  $\hat{\theta}$  即为一致估计:

- i)  $E \mathbf{z}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T$  非奇异,
- ii)  $E \mathbf{z}_k \frac{A(z^{-1})D(z^{-1})}{C(z^{-1})} e_k = 0$ .

由于辅助变量  $\mathbf{z}_k$  和  $e_k$  是相互独立的, 条件 ii) 成立. 现在看条件 i) 是否成立, 下面给出一个定理.

**定理 1.** 考虑 (6a) 所示迭代算法, 假定图 1 所示系统是稳定的, 系统参数  $\theta^*$  唯一存在,  $e_k$ ,  $\mu_k$  和  $r_k$  是平稳且独立的.  $\hat{A}_{j-1}(z^{-1})$  和  $\hat{B}_{j-1}(z^{-1})$  互质, 且  $\hat{S}_{j-1}(z^{-1})$  的所有零点均严格地在单位圆内. 那么只要下面的条件 (I) 或 (II) 任一成立, 就使得  $E \mathbf{z}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T$  非奇异.

(I)  $\frac{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}$  是严格正实的, 且  $r_k$  是  $n_a + n_b$  阶持续激励 (p. e.). 其中

$$S^*(z^{-1}) = A^*(z^{-1}) + B^*(z^{-1})F(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1} + \cdots + s_{n_s}^* z^{-n_s^*},$$

$$n_s^* = \max(n_a^*, n_b^* + n_f).$$

(II)  $r_k$  是一个 AR 过程, 其阶次小于或等于  $n_a + n_b - \max(n_a^*, n_b^* + n_f)$ .

证. 由图 1, 2 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= \left[ -\frac{\hat{B}_{j-1}(z^{-1})}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} r_{k-1} \cdots \cdots -\frac{\hat{B}_{j-1}(z^{-1})}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} r_{k-n_a} \frac{\hat{A}_{j-1}(z^{-1})}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} r_{k-1} \cdots \frac{\hat{A}_{j-1}(z^{-1})}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} r_{k-n_b} \right]^T \\ &= S(-\hat{B}_{j-1}, \hat{A}_{j-1}) \left[ \frac{r_{k-1}}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \cdots \cdots \frac{r_{k-n_a-n_b}}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \right]^T, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_k &= \left[ -\frac{B^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})} r_{k-1} \cdots \cdots -\frac{B^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})} r_{k-n_a} \frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})} r_{k-1} \cdots \frac{A^*(z^{-1})}{S^*(z^{-1})} r_{k-n_b} \right]^T \\ &= S(-B^*, A^*) \left[ \frac{r_{k-1}}{S^*(z^{-1})} \cdots \cdots \frac{r_{k-n_a-n_b}}{S^*(z^{-1})} \right]^T. \end{aligned} \quad (17)$$

这里,  $\tilde{\varphi}_k$  是  $\varphi_k$  不含噪声的部分,  $S(-\hat{B}_{j-1}, \hat{A}_{j-1})$  和  $S(-B^*, A^*)$  都是 Sylvester 矩阵, 根据引理 1 (见附录), 当  $n^* = \min(n_a - n_a^*, n_b - n_b^*) = 0$ ,  $\hat{A}_{j-1}(z^{-1})$  和  $\hat{B}_{j-1}(z^{-1})$ ,  $A^*(z^{-1})$  和  $B^*(z^{-1})$  互质时, 它们满秩.

因为辅助变量  $\mathbf{z}_k$  和噪声无关, 所以有

$$E \mathbf{z}_k \varphi_k^T = E \mathbf{z}_k \tilde{\varphi}_k^T = S(-\hat{B}_{j-1}, \hat{A}_{j-1}) E S(-B^*, A^*). \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} E &= E \left[ \frac{r_{k-1}}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \cdots \cdots \frac{r_{k-n_a-n_b}}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \right]^T \left[ \frac{r_{k-1}}{S^*(z^{-1})} \cdots \cdots \frac{r_{k-n_a-n_b}}{S^*(z^{-1})} \right] \\ &= E \left[ \frac{r_{k-1}}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \cdots \cdots \frac{r_{k-n_a-n_b}}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \right]^T \frac{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})}{S^*(z^{-1})} \left[ \frac{r_{k-1}}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \cdots \cdots \frac{r_{k-n_a-n_b}}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

为了证明  $E \mathbf{z}_k \varphi_k^T$  非奇异, 下面只需证明  $E$  非奇异即可.

(I) 由于  $r_k$  是  $n_a + n_b$  阶持续激励, 且  $\frac{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})}{S^*(z^{-1})}$  是严格正实的, 根据引理 2 (见附录),  $E$  非奇异.

(II) 设有

$$\mathbf{l} = [l_1 \cdots \cdots l_{n_a+n_b}]^T, \quad L(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{n_a+n_b} l_i z^{-i},$$

假定  $r_k$  是一 ARMA 过程, 即

$$\begin{aligned} \alpha(z^{-1}) r_k &= \beta(z^{-1}) \omega_k, \quad \omega_k \text{ 是白噪声, 且 } \alpha(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_{n_a} z^{-n_a}, \\ \beta(z^{-1}) &= 1 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_{n_b} z^{-n_b}. \end{aligned}$$

若  $E$  非奇异, 则对于

$$E \cdot \mathbf{l} = 0 \quad (20)$$

必有  $\mathbf{l} = 0$ . 下面主要利用引理 3 (见附录) 来证明  $\mathbf{l} = 0$  是使 (20) 式成立的唯一解, 从而说明  $E$  非奇异. 由式 (20) 得

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{1}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})} \omega_{k-1} \cdots \cdots \frac{1}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})} \frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})} \omega_{k-n_a-n_b} \right]^T \\ \cdot \left[ \frac{1}{S^*(z^{-1})} \frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})} \omega_{k-1} \cdots \cdots \frac{1}{S^*(z^{-1})} \frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})} \omega_{k-n_a-n_b} \right] \cdot \mathbf{l} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

上式可改写成

$$E \left[ \frac{\beta(z^{-1})z^{-j}}{\hat{S}_{j-1}(z^{-1})\alpha(z^{-1})} \omega_k \right] \left[ \frac{L(z^{-1})\beta(z^{-1})}{S^*(z^{-1})\alpha(z^{-1})} \omega_k \right] = 0, \quad j = 1, \dots, n_a + n_b. \quad (22)$$

根据 Parseval 定理有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^j \frac{\beta(z)}{\hat{S}_{j-1}(z)\alpha(z)} \cdot \frac{L(z^{-1})\beta(z^{-1})}{S^*(z^{-1})\alpha(z^{-1})} \cdot \frac{dz}{z} = 0, \quad j = 1, \dots, n_a + n_b. \quad (23)$$

上式的积分路径是单位圆,  $z$  表示复数域中的变量. 由 (23) 式得

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{j-1} \frac{\beta(z)}{\hat{S}_{j-1}(z)\alpha(z)} \cdot \frac{L(z^{-1})z^{n_a+n_b}\beta(z^{-1})z^{n_\beta}z^{\max(K,0)}}{S^*(z^{-1})z^{n_s^*}\alpha(z^{-1})z^{n_a}z^{\max(-K,0)}} dz = 0, \quad j = 1, \dots, n_a + n_b. \quad (24)$$

上式中  $K = n_s^* + n_a - n_a - n_b - n_\beta$ . 令

$$f(z) = \frac{\beta(z)}{\hat{S}_{j-1}(z)\alpha(z)} \cdot \frac{L(z^{-1})z^{n_a+n_b}\beta(z^{-1})z^{n_\beta}z^{\max(K,0)}}{S^*(z^{-1})z^{n_s^*}\alpha(z^{-1})z^{n_a}z^{\max(-K,0)}}. \quad (25)$$

不难看出  $f(z)$  在单位圆内的极点数是  $n_s^* + n_a + \max(-K, 0)$ . 下面来计算  $f(z)$  在单位圆内的零点个数, 由于

$$\begin{aligned} z^{n_a+n_b}L(z^{-1}) &= z^{n_a+n_b}(l_1z^{-1} + \dots + l_{n_a+n_b}z^{-(n_a+n_b)}) \\ &= l_1z^{n_a+n_b-1} + \dots + l_{n_a+n_b}, \end{aligned}$$

易见  $f(z)$  在单位圆内的零点数为  $n_a + n_b - 1 + n_\beta + \max(K, 0)$ . 根据引理 3, 若

$$n_a + n_b - 1 + n_\beta + \max(K, 0) < n_s^* + n_a + \max(-K, 0) \leq n_a + n_b, \quad (26)$$

即  $f(z)$  在单位圆内的极点个数多于零点个数与满足引理 3(A.6), 这样要使 (23) 式成立的唯一解是  $L(z^{-1}) = 0$ , 即  $l = 0$ . 再由 (20) 式必有  $\Sigma$  非奇异. 下面考虑  $K > 0$  与  $K \leq 0$  两种可能情况.

若  $n_s^* + n_a > n_a + n_b + n_\beta$ , 这显然与引理 3(A.6) 矛盾, 舍去.

若  $n_s^* + n_a \leq n_a + n_b + n_\beta$ , 根据 (26) 式得

$$n_a + n_b + n_\beta - 1 < n_a + n_b + n_\beta \leq n_a + n_b. \quad (27)$$

因此,  $n_\beta = 0$ ,  $n_a \leq n_a + n_b - n_s^* = n_a + n_b - \max(n_a^*, n_b^* + n_f)$ . 所以  $r_k$  是一个 AR 过程, 其阶次小于或等于  $n_a + n_b - \max(n_a^*, n_b^* + n_f)$ . 证毕.

## 五、Monte Carlo 随机仿真实验

限于篇幅, 下面只给出一个稳定闭环系统的随机仿真实验结果, 同时采用 MRIV 法和外部输入 IV 法进行参数估计以资比较. 系统如图 1 所示, 外部输入  $r_k$  为二位式伪随机信号, 其幅值为  $A$ , 两个噪声  $e_k$  和  $\mu_k$  都是均值为零, 方差为  $\sigma^2$  的白噪声信号. 我们定

义信噪比为  $S = \sum_{k=1}^N r_k^2 / \sum_{k=1}^N e_k^2 = \frac{A^2}{\sigma^2}$ . 仿真结果见表 1, 所得估计值是 20 次随机实验的整体平均值. “估计值 1”是用外部输入 IV 法所得结果, “估计值”是 MRIV 法的结果. 真值误差和均值误差分别是估计值对于参数真值和整体平均值的标准差.

表 1 闭环系统仿真实验结果

系统参数名	系统参数真值	S = 10				S = 20			
		估计值 1	估计值	真值误差	均值误差	估计值 1	估计值	真值误差	均值误差
$a_1$	1.4000	0.5562	1.3432	0.0406	0.0423	-0.0240	1.3778	0.0159	0.0161
$a_2$	0.5600	0.2463	0.5286	0.0561	0.0594	0.1161	0.5472	0.0229	0.0234
$b_c$	1.0000	0.1872	0.9729	0.0271	0.0279	-0.5622	0.9987	0.0013	0.0013
$b_1$	0.6000	0.2115	0.6046	0.0077	0.0076	1.1038	0.5707	0.0488	0.0518
$f_0$	1.0000	0.6443	1.0385	0.0385	0.0371	0.7158	1.0073	0.0073	0.0072
$f_1$	-0.4000	-0.5356	-0.3875	0.0321	0.0323	-0.5322	-0.3973	0.0067	0.0068
$c_1$	-0.8000		-0.7980	0.0025	0.0025		-0.7884	0.0145	0.0147
$d_1$	0.6000		0.5907	0.0050	0.0050		0.5973	0.0045	0.0045
$h_1$	-0.8000		-0.8002	0.0002	0.0002		-0.7979	0.0026	0.0026
$g_1$	0.5000		0.5035	0.0070	0.0070		0.5041	0.0082	0.0081
平均迭代次数		5.5 次				5.7 次			

注: 数据量  $N = 1000$ .

从仿真结果可以看出: 由于外部输入  $r_k$  和系统输入  $u_k$ , 输出  $y_k$  弱相关, 因而用  $r_k$  作辅助变量所得估计结果的精度不理想. 用 MRIV 法所得参数估计值的精度很高, 且所得噪声模型参数估计的精度也很高.

对于稳定性差的待辨识系统, 因为第一次辅助模型往往是通过其它精度不高的方法获得的, 系统本身的稳定性差会导致  $\hat{S}_{j-1}(z^{-1})$  的零点落在单位圆外或单位圆上, 这时采用 MRIV 法会发生困难.

### 附 录

定义 1. 考虑两个多项式,  $A^*(z) = a_0 z^{n_a^*} + \dots + a_{n_a^*}$  和  $B^*(z) = b_0 z^{n_b^*} + b_1 z^{n_b^*-1} + \dots + b_{n_b^*}$ , 当  $\min(n_a - n_a^*, n_b - n_b^*) = 0$  时的  $(n_a + n_b) \times (n_a + n_b)$  维的 Sylvester 矩阵如下定义:

$$S(A^*, B^*) = \begin{bmatrix} a_0 a_1 \dots a_{n_a^*} & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot \\ & & a_0 a_1 \dots a_{n_a^*} & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & \dots & \dots & \\ & b_0 b_1 \dots b_{n_b^*} & & & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & 0 & & b_0 b_1 \dots b_{n_b^*} & \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\} n_b \text{ 行} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \left. \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right\} n_a \text{ 行} \end{matrix} \quad (A.1)$$

引理 1. 考虑如 (A.1) 所示的 Sylvester 矩阵  $S(A^*, B^*)$ , 若  $A^*(z)$  和  $B^*(z)$  有  $K$  个相同零点, 则

$$\text{秩}(S(A^*, B^*)) = n_a + n_b - K. \quad (A.2)$$

引理 2. 假设  $\varphi(t)$  是这样一个随机向量, 它使得  $E\varphi(t)\varphi^T(t)$  是正定的. 若滤波器  $H(q^{-1})$  是严格正实的(即  $ReH(e^{j\omega}) > 0, -\pi \leq \omega \leq \pi$ ), 则矩阵

$$P = E\varphi(t)H(q^{-1})\varphi^T(t) \quad (A.3)$$

是正定的.

引理 3. 考虑函数

$$f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{i=1}^k (z - u_i)^{t_i}}. \quad (A.4)$$

其中  $g(z)$  在单位圆内及单位圆上是解析的, 复数  $\{u_i\}$  满足  $|u_i| < 1$  且是互异的,  $t_i$  是大于或等于 1 的整数。假定下面的式子成立:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) z^j \frac{dz}{z} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (A.5)$$

其中积分路径是单位圆, 且

$$\sum_{i=1}^k t_i \leq m, \quad (A.6)$$

则  $f(z)$  在单位圆内是解析的。

以上引理 1—3 参见文献 [2]。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Söderström, T. and Stoica, P., Comparison of Some Instrumental Variable Methods—Consistency and Accuracy Aspects, *Automatica*, 17(1981), 101—115.
- [ 2 ] Söderström, T. and Stoica, P., Instrumental Variable Methods for System Identification, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [ 3 ] Young, P. C. and Jakeman, A. J., Refined Instrumental Variable Methods of Recursive Time-Series Analysis, Part 1. Single Input and Single Output Systems, *Int. J. Control*, 29(1979), 1—30.
- [ 4 ] Söderström, T., Ergodicity Results for Sample Covariances, *Problems of Control and Information Theory*, 4 (2)(1975), 131—138.

## MRIV METHOD FOR THE IDENTIFICATION OF CLOSED LOOP SYSTEMS WITH UNKNOWN FEEDBACK

WANG HONG    CAO DAZHU

(Research Institute of Automation, Southeast University)

### ABSTRACT

In this paper, a Modified Refined Instrumental Variable (MRIV) method which is suitable for the parameter estimation of closed loop systems with unknown feedback is put forth. The consistency problem of this method is analyzed and its validity is testified by Monte Carlo simulation experiments.

**Key words** —— Feedback; system identification; instrumental variable method; refined instrumental variable method.