第15卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 15, No. 5
1989 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1989

多步控制修正下的学习控制

吴东南 程 勉 高为炳
(北京航空航天大学)

摘 要

本文研究了线性时不变系统的学习控制问题. 在多步控制修正下，得到了几个充分条件. 数字例子表明，多步控制修正可较单步修正具有更好的鲁棒性.

关键词: 学习控制，线性系统，迭代控制.

一、引 言

对于确定性控制系统，利用确定性控制使系统输出逼近期望的动态响应，是一种被称为学习控制的新方法[1,2,4,5].

本文拓广了文[1,2,4,5]中的单步修正结果，考虑了多步修正规律，并举例说明多步修正规律比单步修正规律具有较强的鲁棒性.

二、主 要 结 果

现在研究如下系统模型:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A(p)\boldsymbol{x} + B(p)\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} &= C(p)\boldsymbol{x} + D(p)\boldsymbol{u}, \end{aligned} \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathrm{R}^m$, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^l$; A、B、C、D 分别为相应维数常数阵，它们包含不确定参数 p, $p \in \Omega$. 设系统的期望输出为 $\boldsymbol{y}^d(t)$, 系统第 k 次运动中的输出为 $\boldsymbol{y}_k(t)$. 令 $\boldsymbol{e}_k(t) = \boldsymbol{y}^d(t) - \boldsymbol{y}(t)$, 假设 $\boldsymbol{e}_k(0) = 0$, $\forall k \in \mathrm{N}$.

现在的问题是通过前 k 次运动所得到的误差 $\boldsymbol{e}_k(t)$ 及控制 $\boldsymbol{u}_k(t)$, 求得 $\boldsymbol{u}_{k+1}(t)$, 使得第 $k+1$ 次运动的误差减小. 并选取如下形式的控制修正规律: $\forall\ k \geqslant 1$,

$$\boldsymbol{u}_k = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i \boldsymbol{u}_{k-i} + \boldsymbol{h}_i * \boldsymbol{e}_{k-i}), \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \tag{2}$$

其中 α_i 为常数, $\boldsymbol{h} * \boldsymbol{e}_{k-i}$ 为卷积. 设 $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}$, 当 $k < 0$ 时, (2) 式的拉氏变换为

$$U_k(s) = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i U_{k-i}(s) + H_i(s) E_{k-i}(s)). \tag{3}$$

本文于 1987 年 3 月 25 日收到

于是有：

定理 1. 若存在 α_i，$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i = 1$；$H_i(s)$，$i \in p$，使得：$|G(j\omega)H_i(j\omega)| < \infty$，$i \in \underline{p}$，且方程

$$\det\left[z^p - \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i I - G(j\omega)H_i(j\omega)\right] = 0 \tag{4}$$

的零点在单位圆内，则：$\|\boldsymbol{e}_k(t)\| \to 0$，当 $k \to \infty$。这里

$$\|\boldsymbol{e}_k(t)\| = \left[\int_0^\infty \boldsymbol{e}_k^T(t)\boldsymbol{e}_k(t)\,dt\right]^{1/2}.$$

为证明此定理，首先给出如下引理：

引理 1. 设向量序列 $\{\boldsymbol{a}_k\}$，$k = 0, 1, \cdots$，满足：$\forall k \geqslant 1$，

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{i=1}^{p}\Lambda_i\boldsymbol{a}_{k-i}. \tag{5}$$

设 $\boldsymbol{a}_k = 0$，当 $k < 0$；其中 Λ_i 为常数阵，则当方程

$$\det\left[z^p - \sum_{i=1}^{p}\Lambda_i z^{p-i}\right] = 0 \tag{6}$$

的零点均在单位圆内时，有：$\boldsymbol{a}_k \to \boldsymbol{0}$，$k \to \infty$。

证明： 构造一形式级数 $A(z) = \sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{a}_i z^i$，将 (5) 式两边同乘以 z^k，求和有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{a}_k z^k = \sum_{i=1}^{p}\left(\Lambda_i z^i\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{a}_{k-i}z^{k-i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{p}\Lambda_i z^i\right)\boldsymbol{a}_0, \text{ 推出}$$

$$\left(I - \sum_{i=1}^{p}\Lambda_i z_i\right)A(z) = \left(\sum_{i=1}^{p}\Lambda_i z^i\right)\boldsymbol{a}_0. \tag{7}$$

令 $D(z) = I - \sum_{i=1}^{p}\Lambda_i z^i$，则有

$$A(z) = \det{}^{-1}D(z)\theta(z)\boldsymbol{a}_0. \tag{8}$$

这里 $\Theta(z) = \mathrm{adj}D(z)\left(\sum_{i=1}^{p}\Lambda_i z^i\right)\boldsymbol{a}_0 = \left(\sum_{i=1}^{p}W_i z^i\right)\boldsymbol{a}_0$。若 $\boldsymbol{a}_k$ 为 n 维向量，则 $N = np$，W_i 为常数阵。

设 $\det^{-1}D(z) = \beta\prod_{i=1}^{N}(1 - \lambda_i z)^{-1}$，其中 β、λ_i、$i \in \underline{N}$ 均为常数。已知

$$(1 - \lambda_i z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_i^n z^n, \tag{9}$$

由此可得：$\det^{-1}D(z) = \beta\sum_{i=0}^{\infty}b_i z^i$，且

$$b_i = \sum_{n_1+\cdots+n_N=i}\prod_{k=1}^{N}\lambda_k^{n_k}. \tag{10}$$

推得：

$$|b_i| \leqslant i^N[\max(|\lambda_i|)]^i, \tag{11}$$

从而当 $\max(|\lambda_i|) < 1$，$|b_i| \to 0$，$i \to \infty$. 而 λ_i，$i \in \underline{N}$ 恰为方程(6)的零点.

由(8)式可知 $A(z)$ 的 z^k 项系数为

$$\boldsymbol{a}_k = \left(\sum_{i=0}^{k} b_{k-i} W_{i+1}\right) \boldsymbol{a}_0, \tag{12}$$

因为只有有限多项 $W_i \neq 0$，从而 $\boldsymbol{a}_k \to \boldsymbol{0}$，$k \to \infty$ 时，因而引理得证.

定理1的证明：由(12)式及定理中条件知

$$E_k(s) = B_k(s)E_0(s), \tag{13}$$

且当 $k \to \infty$时，$B_k(j\omega) \to 0$，所以

$$\|e_k(t)\| = \frac{1}{2\pi}\|E_k(j\omega)\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sigma_{\min}(B_k(j\omega))M \to 0.$$

定理证毕.

考虑到 $t \in [0, T]$，将(1)、(2)式两端同乘以 $e^{-\lambda t}$，$\lambda \neq 0$，然后用拉氏变换表示有：

$$Y_{k\lambda}(s) = G(s+\lambda)U_{k\lambda}(s), \tag{14}$$

$$U_{k\lambda}(s) = \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i U_{(k-i)\lambda}(s) + H_i(s+\lambda)E_{(k-i)\lambda}(s)), \tag{15}$$

此处，$U_{k\lambda}(s) = U_k(s+\lambda)$，余此类推. 依照证明定理1的同样步骤，可以证明：

定理2. 若在定理1中将 $j\omega$ 换为 $j\omega+\lambda$ 后，其条件依然成立，则同样有 $\|e_k(t)\| \to 0$，当 $k \to \infty$.

推论1. 当 $D=0$时，若存在 α_i，Γ_i，$i \in \underline{p}$，满足 $\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i = 1$，且方程

$$\det\left[z^p - \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i - CB\Gamma_i)z^i\right] = 0 \tag{16}$$

的零点均在单位圆内，则系统(1)有：

$$\|\boldsymbol{y}_k(t)\| \to \|\boldsymbol{y}^d(t)\|,$$

由于篇幅限制，证明省略.

注1：对于多步修正，可以证明存在 $H_i(s)$，α_i，$i \in \underline{p}$，使得条件(4)成立的充分必要条件为 $G(s)$ 行满秩.

注2. 寻求系统的收敛性与其控制算式中的系数的关系无疑对于设计控制律及实际应用有重要意义. 从(9)式可看出，系统收敛与控制算式的关系较复杂，不易得到一个较简单的关系. 但这无疑是今后的努力方向之一.

三、例　　子

由于(4)式中参数较 $p=1$ 时为多，从而可望提高鲁棒性能. 首先考虑下面两个方程：

$$1)\ z-\Delta=0,\quad 2)\ z^2-\Delta z+\frac{1}{2}\Delta=0.$$

可以证明，1) 的根在单位圆内当且仅当 $|\Delta|<1$；而 2) 的根在单位圆内当且仅当 $\Delta\in\left(-\frac{2}{3},2\right)$. 从而在 2) 中，$\Delta$ 的变化范围较 1) 中大.

现对单步修正与多步修正做了一个数字例子对比．取

$$A=\begin{bmatrix}1.0 & -1.0\\ 0.0 & -1.2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1.2 & 0.3\\ 2.0 & 3.2\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}-1.2 & -2.0\\ -1.0 & 0.0\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}0.5 & -1.1\\ 0.7 & 1.4\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}1.0 & 0.0\\ 2.0 & 2.0\end{bmatrix},$$

$\alpha_1=0.7$，$\alpha_2=0.3$，应用推论 1，取 $\Gamma_1=\alpha_1(C_0B_0)^{-1}$，$\Gamma_2=\alpha_2(C_0B_0)^{-1}$. C_0、B_0 为参数 $r=0$ 的值，$T=10$ 秒．算得单步修正允许 r 的变化范围为 $(-0.62, 0.23)$，多步修正的 r 值变化范围为 $(-0.80, 0.247)$，数字结果还表明当单步与多步修正的条件不满足时，系统仍可收敛，选取 $r=-0.62$ 时的结果示于图 1—图 4 中．可以看出单步修正收敛较快．

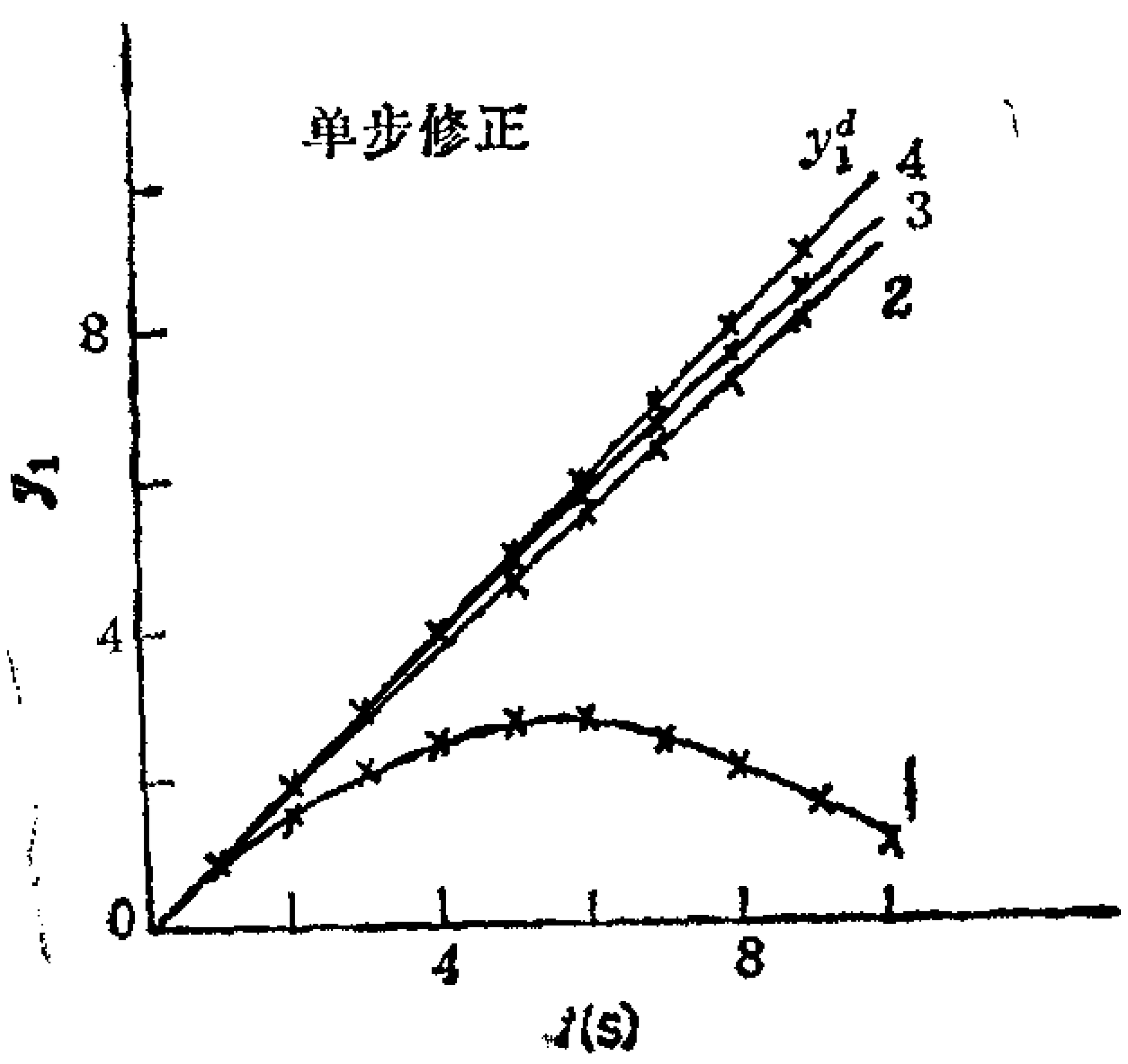

图 1

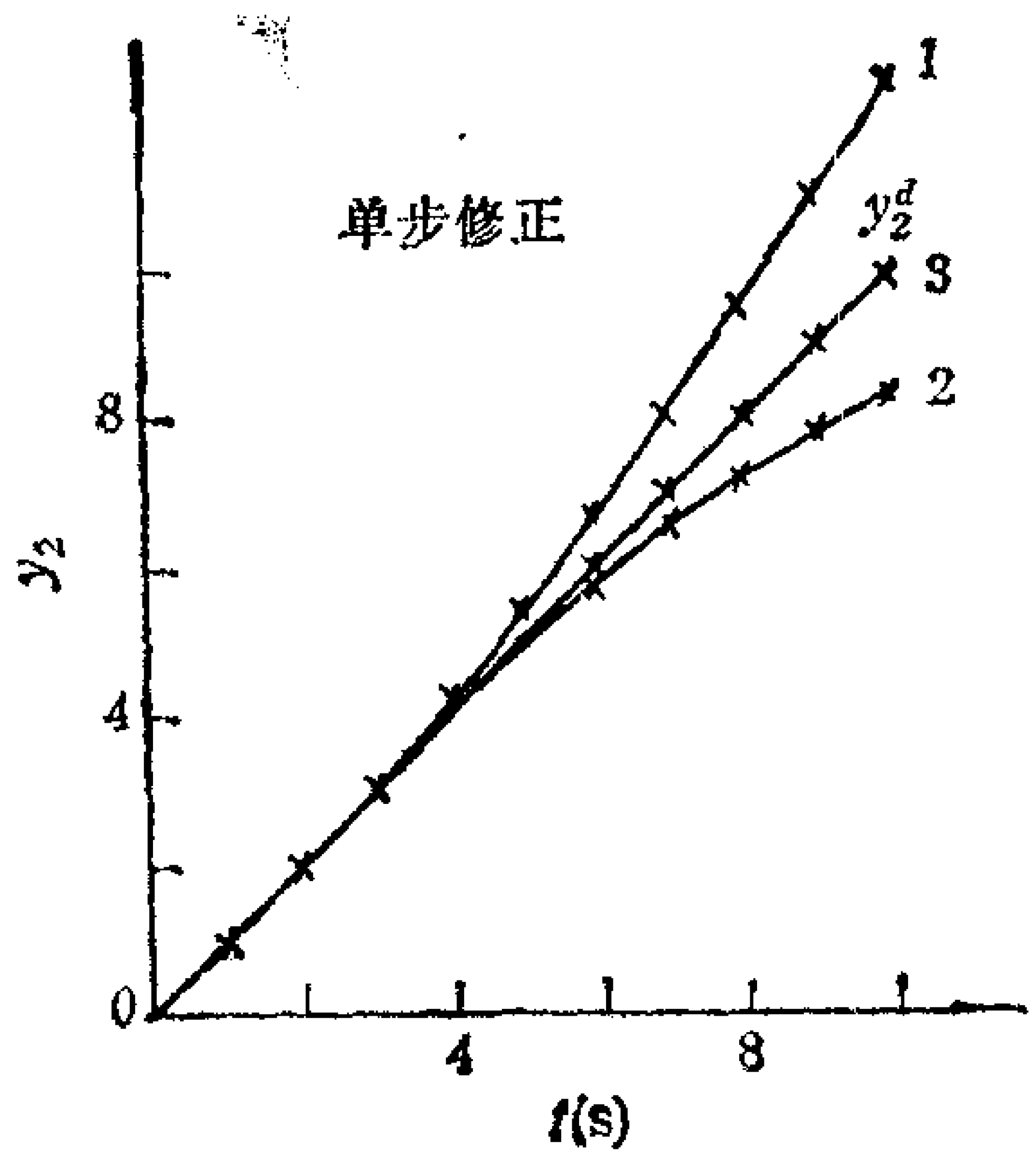

图 2

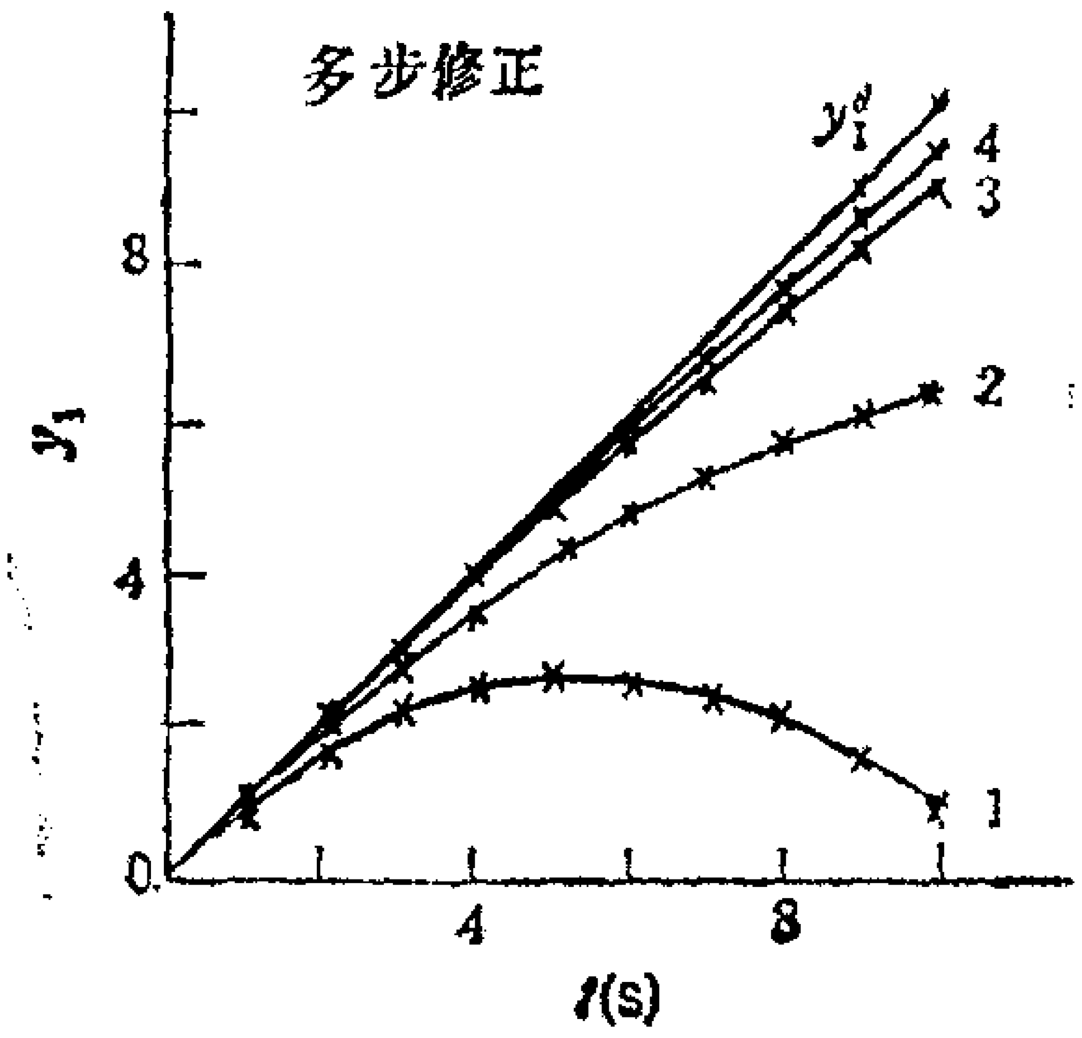

图 3

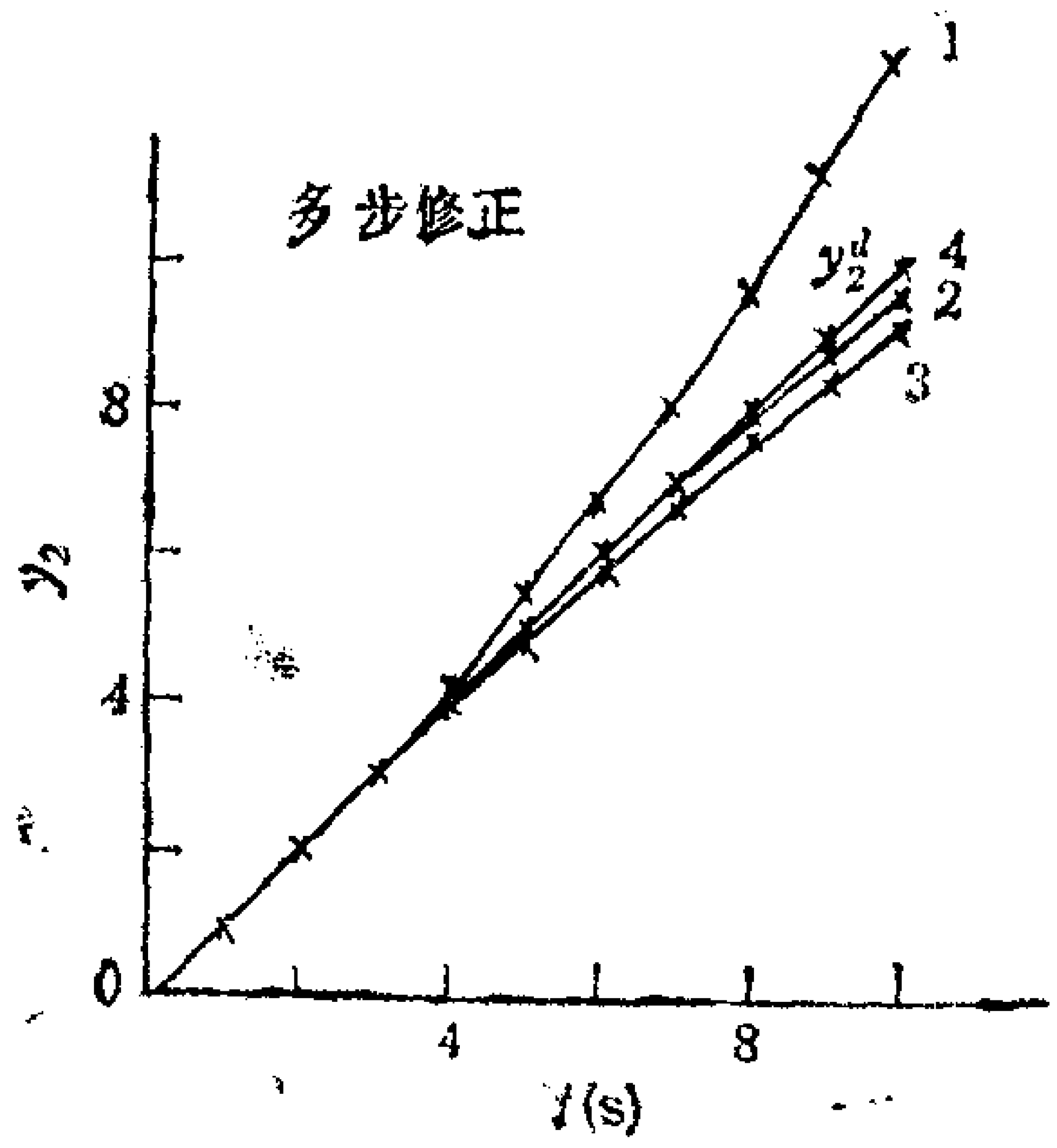

图 4

参 考 文 献

[1] Arimoto, S., Kawamura, S., Miyazaki, F., Bettering Operation of Dynamical Systems by Learning: A New Control Theory for Servomechanism or Mechatronism Systems, Proc. 23rd Conf. Decision and Control. Las Vegas NV, 1984, 1064—1069.

[2] Arimoto, S., Kawamura, S., Miyazaki, F., Tomaki, S. Learning Control Theory for Dynamical Systems, Proc. 24th Conf. Decision and Control, Ft. Lauderdale FL, 1985, 1375—1380.

[3] Kawamura, S., Miyazaki. F., Arimoto, S., Application of Learning Method for Dynamical Control of Robot Manipulators, Proc. 24th Conf. Decision and Control, Ft. Lauderdale FL, 1985, 1381—1386.

[4] Mita, E., Kato, T., Iterative Control and Its Application to Motion Control of Robot Arms——A Direct Approach to Servo-problem, Proc. 24th Conf. Decision and Control, Ft. Lauderdale FL, 1985, 1393—1398.

[5] Fu, K. S., Learning Control Systems-Review and Outlook, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-15**(1970), 4, 210—221.

[6] Saridis, G. N., Self-Organizing Control of Stochastic Systems, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1977.

LEARNING CONTROL UNDER MULTISTEP MODIFICATION LAW

WU DONGNAN　　CHENG MIAN　　GAO WEIBING

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

The learning control of linear time-invariant systems is studied in this paper. With multistep modification law, several sufficient conditions are derived. The examples presented show that the system may have stronger robustness with the multistep modification law than with the singlestep modification law.

Key words ——Learning control; linear systems; iterative control.