

多变量时滞系统的结构辨识

张志湧
(福州大学)

摘 要

本文利用投影技术提出一种辨识结构的新方法。它能在多变量系统模型参数被估计之前,直接从输入输出数据中确定该模型的时滞因子集、可观指数集及最小估计参数集。

关键词——结构辨识,多变量系统,时滞系统,建模,参数估计。

一、问题的表述

许多多变量时滞系统可用标准向量差分方程描述为

$$\mathbf{y}(t) = A(q^{-1})\mathbf{y}(t) + B(q^{-1})\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^{\nu_m} A^{(k)}\mathbf{y}(t-k) + \sum_{k=\mu}^{\nu_m} B^{(k)}\mathbf{u}(\cdot), \quad (1)$$

式中 $\mathbf{y}(\cdot) \in R^m$, $\mathbf{u}(\cdot) \in R^r$. 约定时滞因子满足 $\text{Min}\{\tau_j; j=1, \dots, r\}=0$ 时, $\mu \triangleq 0$, 否则 $\mu=1$. 同时不失一般记可观指数 $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_m$. 当 $\nu_0 \triangleq 0$; $\nu_{i-1} < k \leq \nu_i$; $i=1, \dots, m$ 时, $A^{(k)}$ 的上 $(k-1)$ 行全是零元素平凡行. 对于 $\{A^{(k)}; k=1, \dots, \nu_m\}$, 在第 i 行位置上所含的非平凡行数目等于第 i 子系统的可观指数 $\nu_i^{[1]}$. $B^{(k)}$ 的情况大致与 $A^{(k)}$ 相似. 式(1)的第 i 分量差分方程为

$$y_i(t) = A_i(q^{-1})y_i(t) + B_i(q^{-1})u(t), \quad (2)$$

式中

$$A_i(q^{-1}) = \left[\left(\sum_{k=\nu_{i-1}}^0 a_{i1k} q^{k-\nu_i} \right) \cdots \left(\sum_{k=\nu_{i-1}-1}^0 a_{i(i-1)k} q^{k-\nu_i} \right) \right. \\ \left. \times \left(\sum_{k=\nu_i-1}^0 a_{iik} q^{k-\nu_i} \right) \cdots \left(\sum_{k=\nu_i-1}^0 a_{imk} q^{k-\nu_i} \right) \right], \quad (3)$$

$$B_i(q^{-1}) = \left[\left(\sum_{k=\nu_i-\mu_1}^0 b_{i1k} q^{k-\nu_i-\tau_1+\mu_1} \right) \cdots \left(\sum_{k=\nu_i-\mu_r}^0 b_{irk} q^{k-\nu_i-\tau_r+\mu_r} \right) \right]. \quad (4)$$

时滞因子 $\tau_j \geq 0$; $j=1, \dots, r$. 且若 $\tau_j=0$, 取 $\mu_j=0$; 否则 $\mu_j=1$. 式(3)的前 $(i-1)$ 个 Σ 的下限分别是 $(\nu_1-1), \dots, (\nu_{i-1}-1)$, 而其余 Σ 的下限均是 (ν_i-1) . $A_i(q^{-1}), B_i(q^{-1})$ 中的非平凡参数构成最大独立参数组. 结构确定前, ν_1, \dots, ν_m 相对

大小未知,为了辨识应把 $A_i(q^{-1})$ 的前 $(i-1)$ 个 Σ 的下限扩充为 (v_i-1) ,即

$$A_i(q^{-1}) = \left[\left(\sum_{k=v_i-1}^0 a_{i1k} q^{k-v_i} \right) \cdots \left(\sum_{k=v_i-1}^0 a_{imk} q^{k-v_i} \right) \right]. \quad (5)$$

这种修改可能使非独立参数产生过参数化,从而使应用递推参数估计穷试法或不可靠或不可能^[2].

考虑输出噪声时,记 $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$, 代入式(1)得

$$\mathbf{z}(t) = A(q^{-1})\mathbf{z}(t) + B(q^{-1})\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t) = [I - A(q^{-1})]\mathbf{v}(t).$$

由式(2),(4),(5),使用观测数据可写出

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i(t) = & \sum_{j=1}^m \sum_{k=v_i-1}^0 a_{ijk} \mathbf{z}_j(t+k-v_i) \\ & + \sum_{j=1}^r \sum_{k=v_i-\mu_j}^0 b_{ijk} \mathbf{u}_j(t+k-v_i-\tau_j+\mu_j) + \mathbf{w}_i(t), \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{z}_j(\cdot)$, $\mathbf{u}_j(\cdot)$, $\mathbf{w}_i(\cdot)$ 是 N 维向量. 本文目标是利用式(6), 不经参数估计, 从观测数据中直接确定符合参数简炼原则^[2]的模型结构.

二、时滞因子的确定

与以往残差穷算法^[3]估计参数置信检验法^[4]不同, 本文由因果律出发, 通过变差的分解, 经 F 检验确定时滞因子.

设噪声 $\mathbf{v}(t) = C(q^{-1})D(q^{-1})\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{e}(t)$ 是各分量独立的零均值高斯白噪声. 输入 $\mathbf{u}(t)$ 是独立的零均值高斯白信号或 PRBS, 且与 $\mathbf{v}(t)$ 独立.

向量 $\mathbf{z}_i(t)$ (记 \mathbf{z}) 向 $\mathbf{u}_j(t-\xi)$ (记 \mathbf{u}) 投影得 $\mathbf{z}_u = \beta\mathbf{u}$, $\beta = (\mathbf{z}^T\mathbf{u})/\|\mathbf{u}\|^2$. β 是 \mathbf{z} 分量的线性组合, 可证 $\beta \sim N(\mu_\beta, \sigma_z^2/\|\mathbf{u}\|^2)$, 其中 σ_z^2 是 $\mathbf{z}_i(\cdot)$ 的方差^[5]. 因

$$E\{\|\mathbf{z}_u\|^2\} = E\{\beta^2\}\|\mathbf{u}\|^2 = [D(\beta) + E^2(\beta)]\|\mathbf{u}\|^2 = \sigma_z^2 + \mu_\beta^2\|\mathbf{u}\|^2,$$

所以 \mathbf{z}_u 的余向量 $\tilde{\mathbf{z}} \triangleq \mathbf{z} - \mathbf{z}_u$ 有 $E\{\|\tilde{\mathbf{z}}\|^2\} = E\{\|\mathbf{z}\|^2 - \beta^2\|\mathbf{u}\|^2\} = (N-2)\sigma_z^2$. 据以上两式知: $\|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 \sim \sigma_z^2 \chi^2(N-2)$, 以及在 $\mu_\beta = 0$ 的假设下 $\|\mathbf{z}_u\|^2 \sim \sigma_z^2 \chi^2(1)$. 为表达统计量简洁引入相对投影长度 $\gamma = (\mathbf{z}^T\mathbf{u})/(\|\mathbf{z}\|\|\mathbf{u}\|) = \beta\|\mathbf{z}\|/\|\mathbf{u}\|$. 于是在假设 $H: \beta = 0$ 或 $\gamma = 0$ 时, 统计量

$$f_{ij} = \frac{\|\mathbf{z}_u\|^2}{\|\tilde{\mathbf{z}}\|^2} \cdot (N-2) = \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \cdot (N-2) \sim F(1, N-2).$$

因为式(6)表明 $E\{\mathbf{z}^T\mathbf{u}\} = 0$ ($\xi \leq \tau_j - 1$ 时), 所以在水平 α 下若有 $f_{ij} \leq F_\alpha(1, N-2)$, 便接受 H 假设, 即 $\mathbf{z}_i(t)$ 不含 $\mathbf{u}_j(t-\xi)$. 由此估得一组 $\{\hat{t}_{ij}: i=1, \dots, m; j=1, \dots, r\}$, 并取 $\hat{t}_i = \text{Min}\{\hat{t}_{ij}: i=1, \dots, m\}$, $\hat{\mu}_j$ 随之确定. 对于时滞因子随 i, j 变化的更一般的系统, 只要条件 $\tau_{ij} \leq \tau_{kj} + 1$, ($k=1, \dots, m$) 满足, 此法同样适用.

三、可观指数的确定

若用 H_n 记式(6)在可观指数试验值为 n 时所有 N 维向量 $\mathbf{z}_j(\cdot)$, $\mathbf{u}_j(\cdot)$ 组成的矩

阵,则 $\mathbf{z}_i(t)$ 向 $\mathbf{S}_n = \text{Span}\{H_n\}$ 投影后得残差 $\mathbf{r}_n = M_n \mathbf{z}_i(t)$, $M_n = (I - H_n H_n^+)$.

在 $n \leq \nu_i$ 时,可分解 $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_n \oplus \bar{\mathbf{S}}_n$, 并相应地有 $M_n = M_n + P_n$, P_n 是 $\bar{\mathbf{S}}_n$ 投影算子. 利用正交幂等性得

$$\|\mathbf{r}_n\|^2 = \|\mathbf{r}_n\|^2 + \|P_n \mathbf{z}_i(t)\|^2. \quad (7)$$

在 $n \geq \nu_i$ 时,由于 $[\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{w}_i(t)]$ 在 \mathbf{S}_n 中,故 $\mathbf{r}_n = M_n \mathbf{w}_i(t)$. 若被识系统渐近稳定,虑及 $\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)$ 形式,可写

$$\mathbf{w}_i(t) = \sum_{k=1}^{n_r} q_{ik} \mathbf{w}_i(t-k) + \tilde{\mathbf{e}}_i(t),$$

$\tilde{\mathbf{e}}_i(t)$ 是白色的. M_n 作用于上式后得

$$\|\mathbf{r}_n\|^2 = \|\mathbf{d}_n\|^2 + \|\tilde{\mathbf{e}}_i(t)\|^2. \quad (8)$$

式中

$$\mathbf{d}_n \triangleq \sum_{k=1}^{n_r} q_{ik} M_n \mathbf{w}_i(t-k).$$

式(7)表明,仅当 $n = \nu_i$ 时式右边第二项为零,故一般当 $n < \nu_i$ 时 $\|\mathbf{r}_n\|^2 \gg \|\mathbf{r}_n\|^2$. 这正是以往残差法的理论依据. 而式(8)又表明,在 $n \geq \nu_i$ 时,由于 $\mathbf{w}_i(t)$ 与 H_n 中向量的相关性,使 $\|\mathbf{d}_n\|$ 随 n 的增加逐渐减小,即 $\|\mathbf{r}_n\|$ 渐渐减到 $\|\tilde{\mathbf{e}}_i(t)\|$. 这种结构膨胀时的自滤作用或使残差法确定的结构过大,或使结构无法确定. 引入 $\text{span}\{\mathbf{r}_n(t-k): k=1, \dots, n_r\}$ 的补投影算子 M_r ,在它滤波作用下 $\mathbf{r}_n(t)$ 白化,得 $\tilde{\mathbf{e}}_i(t) = M_r \mathbf{r}_n(t)$. 由此绘得的曲线

$$\hat{\sigma}_i(n) = \|\tilde{\mathbf{e}}_i(t)\|/\sqrt{N},$$

从 $n = \hat{\nu}_i$ 起转折为一条平行 n 轴的直线,并在一定条件下 $\hat{\sigma}_i(\hat{\nu}_i)$ 给出 $\mathbf{e}_i(t)$ 的标准差估计值^[6].

四、最小估计参数集的确定

在可观指数确定后,可认定 $\hat{\nu}_1 \leq \hat{\nu}_2 \leq \dots \leq \hat{\nu}_m$ 而不失一般. 设第 i 子系统的 L 个非平凡参数组成 θ_L 集. 对于每个具体给定的被识系统, θ_L 中可能存在零值参数. 零值参数的全体记 $\bar{\theta}_i$,而它的补集 θ_i 即是待定的最小估计参数集.

记式(6)中那些与 θ_L, θ_i 参数相应的向量 $\mathbf{z}_i(\cdot), \mathbf{u}_i(\cdot)$ 为 $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_L\}, \{\mathbf{h}_{p_1}, \dots, \mathbf{h}_{p_l}\}$, 并构成 $\mathbf{S}_L = \text{Span}\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_L\}, \mathbf{S}_i = \text{Span}\{\mathbf{h}_{p_1}, \dots, \mathbf{h}_{p_l}\}$ 以及满足 $\mathbf{S}_L = \mathbf{S}_i \oplus \bar{\mathbf{S}}_i$ 的 $\bar{\mathbf{S}}_i$. 又记 $\mathbf{S}_L, \mathbf{S}_i$ 的 N 维补空间投影算子为 M_L, M_i , 以及 $\bar{\mathbf{S}}_i$ 的投影算子为 P_i . 于是 $\mathbf{z}_i(t)$ 向 \mathbf{S}_i 投影后的残差向量 $M_i \mathbf{z}_i(t)$ 可分解为两个正交向量 $P_i \mathbf{z}_i(t)$ 及 $M_L \mathbf{z}_i(t)$, 且由正交幂等性知

$$\|M_i \mathbf{z}_i(t)\|^2 = \|P_i \mathbf{z}_i(t)\|^2 + \|M_L \mathbf{z}_i(t)\|^2.$$

由于 θ_L 是最大可能独立参数集, 因此有残差平方和 $\|M_L \mathbf{z}_i(t)\|^2 \sim \sigma^2 \chi(N-L)$ ^[7]. 若 $\bar{\theta}_i$ 非空, 即 $\bar{\theta}_i$ 中的参数确实为零, 那末又有 $\|M_i \mathbf{z}_i(t)\|^2 \sim \sigma^2 \chi(N-l)$. 据 Cochran 定理知, $\|P_i \mathbf{z}_i(t)\|^2 \sim \sigma^2 \chi(L-l)$. 于是在假设 $H_0: \bar{\theta}_i$ 非空时

$$f_i = \frac{\|P_l z_i(t)\|^2}{\|M_L z_i(t)\|^2} \cdot \frac{(N-L)}{(L-l)} \sim F(L-l, N-L).$$

当 $f_i \leq F_\alpha(L-l, N-L)$ 时, 接受 H_0 假设.

为消除向量 h_1, \dots, h_L 间相关性对计算的不利影响及便于投影计算, 采用 Schmidt 法递推正交分解 S_L , 并按向量对残差平方和下降贡献最大原则逐根从 $\{h_1, \dots, h_L\}$ 中挑选, 然后经 F 检验, 得 $\{h_{p_1}, \dots, h_{p_l}\}$, 于是最小估计参数 θ_l 相应地得到确定.

五、数值算例

算例是由文献[1]引入时滞因子 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 4, \tau_3 = 0$ 后构成的三输入三输出时滞系统

$$y(t) = \sum_{k=1}^{v_3} A^{(k)} y(t-k) + \sum_{k=0}^{v_3} B^{(k)} \begin{bmatrix} u_1(t-k-\tau_1+\mu_1) \\ u_2(t-k-\tau_2+\mu_2) \\ u_3(t-k-\tau_3+\mu_3) \end{bmatrix},$$

其可观指数 $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3$. 系数矩阵取值列在表 1 的模 I 栏. 输入信号用 PRBS, 长 255, 幅值 1. 外加噪声 $v(t)$ 生成时取

$$C(q^{-1}) = \text{diag} \{ (1 - 0.5q^{-1})(1 - 0.4q^{-1} + 0.2q^{-2})(1 - 0.5q^{-1} + 0.24q^{-2} - 0.02q^{-3}) \},$$

$$D(q^{-1}) = \text{diag} \{ (1 + 0.35q^{-1})(1 - 0.2q^{-1} + 0.37q^{-2})(1 - q^{-1} + 0.57q^{-2} - 0.082q^{-3}) \}.$$

$e(t)$ 是与输入独立的零均值高斯白噪声, 各分量标准差 $\sigma_1 = 0.25, \sigma_2 = 0.35, \sigma_3 = 0.15$. 检验水平 $\alpha = 0.05$. 辨识结果分别见图 1, 表 1.

表 1 算例与辨识结果结构比较

	$A^{(1)}$	$A^{(2)}$	$A^{(3)}$	$B^{(0)}$	$B^{(1)}$	$B^{(2)}$	$B^{(3)}$
模 I	0.2 0 0 0 -1.1 0 -0.5 0 0.5	0 0 0 0 -0.28 0 0.1 -0.5 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0.3	0 0 0 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 2 1 0 1 0	0 0 0 -1.4 -0.4 0.5 -1 -0.25	0 0 0 0 0 0 0 0.6 0
模 II	0.2 0 0 0 -1.1 0 0 0 0.5	0 0 0 0 -0.28 0 0 -0.5 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0.3	0 0 0 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 2 1 0 1 0	0 0 0 -1.4 -0.4 0 -1 -0.25	0 0 0 0 0 0 0 0.6 0
模 III	* * * 0 * * 0 0 *	0 0 0 * * * 0 * *	0 0 0 0 0 0 * * *	0 0 0 0 0 0 0 0 *	* * * * * * * * *	0 0 * * * * * * *	0 0 0 0 0 * * * *
模 IV	* 0 0 0 * 0 0 0 *	0 0 0 0 * 0 0 * 0	0 0 0 0 0 0 0 * *	0 0 0 0 0 0 0 0 *	* 0 0 0 * * 0 * 0	0 0 0 0 * * 0 * *	0 0 0 0 0 0 0 * 0

在确定可观指数时, 白化滤波器取阶数 $n_r = 1$. 图 1 中虚线由残差法所得. 而实线是由本文方法所得, 它清晰地指示了 $\hat{v}_1 = 1, \hat{v}_2 = 2, \hat{v}_3 = 3$, 同时给出 $\hat{\sigma}_1 = 0.2672, \hat{\sigma}_2 = 0.3716, \hat{\sigma}_3 = 0.1952$.

表中模 II 是算例经变换所得的等价标准向量差分方程. 时滞因子估计值 $\hat{\tau}_1 = 1,$

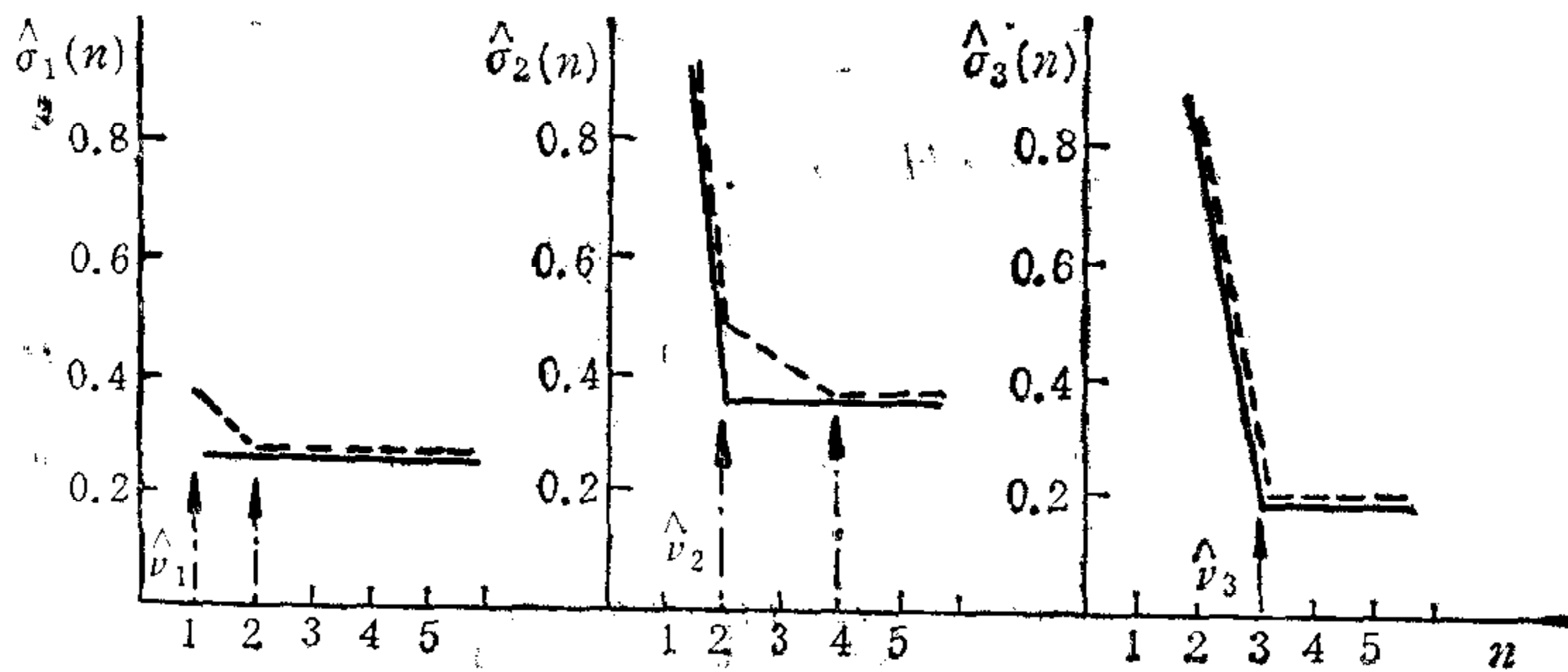


图1 可观指数的确定

$\hat{\tau}_2 = 4$, $\hat{\tau}_3 = 0$ 与原例一致。模 III 是在可观指数确定后所得。它的 θ_L 集有 35 个待估参数,而在模 IV 最小估计参数集 θ_i 中仅有 17 个待估参数。比较模 II, IV, 可以看出两者结构(包括时滞, 可观指数及参数位置)很好吻合。模 IV 中“ \otimes ”被判定为对系统贡献最小的参数。

参 考 文 献

- [1] Bokor, J. and Keviczky, L., Structure Properties and Structure Estimation of Vector Difference Equations, *Int. J. Control*, 36(1982), 461—475.
- [2] Ljung, L. and Soderstrom, T., Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press, 1983.
- [3] Hsia, T. C., System Identification-Least Squares Methods, Lexington Books, Mass., 1977.
- [4] 邓自立, 郭一新, 多变量 CARMA 模型的结构辨识, 自动化学报, 1(1986), 18—24.
- [5] 陈希孺, 数理统计引论, 科学出版社, 1981.
- [6] 张志湧, 辨识 VDE 结构的白化残差技术, 控制理论与应用, 3(1988), 13—19.
- [7] Astrom, K. J., Lecture on the Identification Problem- The Least Squares Method, Report 6806, Lund, Sweden, 1968.

THE STRUCTURE IDENTIFICATION OF MULTIVARIABLE SYSTEMS WITH TIME-LAGS

Zhang Zhiyong
(Fuzhou University)

ABSTRACT

Based on projection technique, a new method proposed here for structure identification, makes it possible to directly determine the time-lag set, the observability indices set and the minimal set of parameters to be estimated for a multivariable system's model from input-output data prior to the estimation of parameters in the model.

Key words —Structural identification; multivariable system; time-lag system; modeling; parameter estimation.