文章编号: 1000-341X(2007)04-0913-06 **文献标识码**: **A**

Banach 空间中两个极大单调算子公共零点的迭代格式

魏 利 [1,2], 周海云 [2,3]

(1. 河北经贸大学数学与统计学学院, 河北 石家庄 050061;
2. 军械工程学院应用数学与力学研究所, 河北 石家庄 050003;
3. 河北师范大学数学与信息科学学院, 河北 石家庄 050016)
(E-mail: diandianba@yahoo.com)

摘 要: 令 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间, E^* 为其对偶空间. 令 $A, B \subset E \times E^*$ 为极大单调算子且 $A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset$. 本文将引入新的迭代格式, 利用 Lyapunov 泛函与广义投影算子等技巧, 证明迭代序列弱收敛于极大单调算子 A 和 B 的公共零点.

关键词: Lyapunov 泛函; 极大单调算子; 一致凸 Banach 空间.
MSC(2000): 47H05; 47H09
中图分类: O177.91

1 引言及预备知识

应用数学中的许多问题, 如: 求正则、下半连续、凸泛函的最小值; 求单调变分不等式的解等都可以转化为寻找极大单调算子零点的问题 [1], 所以如何设计迭代格式用以逼近极大单调算子的零点便成为十分活跃的数学课题.

1976 年, Rockafellar 在 Hilbert 空间的框架下, 构造了近似邻近点算法 $x_{n+1} \approx (I + c_nA)^{-1}x_n$, 此后, 基于此算法的其它算法被发展起来 [2−4]. 但这些算法大多局限在 Hilbert 空间的框架内. 而与许多重要问题相关联的极大单调算子往往定义在一般 Banach 空间中, 如与椭圆边值问题相关联的极大单调算子以 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 作为其定义域 [5]. 基于此因, 本文将把 Mann 迭代法 [6] 和近似邻近点算法揉和在一起, 在一般 Banach 空间中构造出新的迭代格式, 利用 Lyapunov 泛函与广义投影算子等技巧, 证明迭代序列弱收敛于两个极大单调算子的公共零点.

设 E 为实 Banach 空间, E^* 为其对偶空间. 正规对偶算子 $J \subset E \times E^*$ 定义为

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, \quad x \in E,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 E 与 E^* 元素间的广义对偶对. 用 “$\longrightarrow$” 和 “$\rightharpoonup$” 分别表示空间 E 或 E^* 中序列的强、弱收敛. 称多值算子 $A \subset E \times E^*$ 为单调算子: 如果 $\forall x_i \in D(A), y_i \in Ax_i, i = 1, 2$, 均有 $\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$. 单调算子 A 称为极大单调的: 如果 A 的图像 $G(A) = \{(x, y) : x \in D(A), y \in Ax\}$ 不真含于其它单调算子的图像之中.

引理 1[7−8] 正规对偶算子的一些基本性质:

(i). 设 E 为实 Banach 空间, 则 $\forall x \in E, Jx \neq \emptyset, D(J) = E, J \subset E \times E^*$ 是有界、单调算子;

收稿日期: 2005-10-08; **接受日期**: 2006-07-02
基金项目: 国家自然科学基金 (10471033).

(ii). 若 E 是实自反、光滑 Banach 空间，则 $J: E \to E^*$ 为单值、次连续、严格单调的且 $JE = E^*$;

(iii). 若 E 是实光滑、一致凸 Banach 空间，则 $J^{-1}: E^* \to E$ 为正规对偶算子，且在 E^* 的每个有界子集上一致连续.

引理 2[8] 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间. 则:

(i). 单调算子 $A \subset E \times E^*$ 是极大单调的 $\Leftrightarrow \forall r > 0,\ R(J + rA) = E^*$;

(ii). 若 $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子，则其核 $A^{-1}0 = \{x \in E : 0 \in Ax\}$ 是 E 中的闭凸子集；其图像 $G(A)$ 是次闭的，即: $\forall \{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \rightharpoonup x\ (n \to \infty)$, $\forall y_n \in Ax_n$, $y_n \to y\ (n \to \infty) \Rightarrow x \in D(A)$ 且 $y \in Ax$.

定义 1 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间， $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子. $\forall r > 0$, 定义算子 $Q_r^A : E \to E$ 为 $Q_r^A x = (J + rA)^{-1} Jx$, 并称之为 Q_r^A 算子.

定义 2 设 E 为实光滑 Banach 空间，定义 Lyapunov 泛函 $\varphi: E \times E \to R^+$ 如下:

$$\varphi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in E.$$

引理 3[3] 设 E 为实自反、严格凸、光滑 Banach 空间， C 为 E 中的非空、闭、凸子集，则: $\forall x \in E$, 存在唯一的 $x_0 \in C$, 满足: $\varphi(x_0, x) = \inf\{\varphi(z, x) : z \in C\}$. 此时，对 $\forall x \in E$, 定义 $Q_C : E \to C$ 为 $Q_C x = x_0$, 并称 Q_C 为从 E 到 C 上的广义投影算子.

引理 4[3] 设 E 为实自反、严格凸、光滑 Banach 空间， C 为 E 中的非空、闭、凸子集，则 $\forall x \in E, \forall y \in C$, 有: $\varphi(y, Q_C x) + \varphi(Q_C x, x) \le \varphi(y, x)$.

引理 5[3] 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间， $\{x_n\}, \{y_n\}$ 为 E 中两个序列，若其中之一有界，且 $\varphi(x_n, y_n) \to 0,\ n \to \infty$, 则 $x_n - y_n \to 0,\ n \to \infty$.

引理 6[9] 设 E 为实自反、严格凸、光滑 Banach 空间， $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子，$A^{-1}0 \ne \emptyset$, 则: $\forall x \in E,\ y \in A^{-1}0$ 及 $r > 0$, 有: $\varphi(y, Q_r^A x) + \varphi(Q_r^A x, x) \le \varphi(y, x)$.

引理 7[3] 设 E 为实光滑 Banach 空间， C 为 E 中的非空、闭、凸子集， $x \in E, x_0 \in E$. 则: $\varphi(x_0, x) = \inf\{\varphi(z, x) : z \in C\}$ 当且仅当 $\langle z - x_0, Jx_0 - Jx\rangle \ge 0, \forall z \in C$.

2 主要结果

以下设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间， $A, B \subset E \times E^*$ 为极大单调算子且 $D := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \ne \emptyset$. 对给定的初始向量 $x_1 \in E$ 及数 $r_1 > 0$, 我们引入精确迭代算法

$$\begin{cases} x_1 \in E, \quad r_1 > 0, \\ \overline{x_n} = Q_{r_n}^A x_n, \quad n \ge 1, \\ \widehat{x_n} = Q_{r_n}^B x_n, \quad n \ge 1, \\ x_{n+1} = J^{-1}[\alpha_n J\overline{x_n} + (1 - \alpha_n) J\widehat{x_n}], \quad n \ge 1 \end{cases} \tag{CEIA}$$

和近似迭代算法:

$$\begin{cases} x_1 \in E, \quad r_1 > 0, \\ \overline{x_n} = Q_{r_n}^A x_n, \quad n \ge 1, \\ \widehat{x_n} = Q_{r_n}^B x_n, \quad n \ge 1, \\ x_{n+1} = J^{-1}[\alpha_n J\overline{x_n} + \beta_n J\widehat{x_n} + \gamma_n Je_n], \quad n \ge 1. \end{cases} \tag{CPIA}$$

下面陈述并证明本文的主要结果.

定理 1 设正规对偶算子 $J: E \to E^*$ 为弱序列连续的，即：当 $\{x_n\} \subset E$, $x_n \rightharpoonup x$ 时，$Jx_n \rightharpoonup Jx, n \to \infty$. 设 $\{x_n\}$ 是由精确迭代算法 (CEIA) 产生的迭代序列，令 $Q_D := Q_{A^{-1}0 \cap B^{-1}0}$ 为从 E 到 D 上的广义投影算子. 进一步假设 $\{r_n\} \subset (0, +\infty)$, $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ 满足：$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n > 0$, 则：$\{x_n\}$ 弱收敛于 $v \in D$, 其中 v 是满足：

$$v = \lim_{n\to\infty} Q_D(x_n) \tag{1}$$

的唯一元.

证明 第一步. $\{x_n\}$, $\{\overline{x_n}\}$ 和 $\{\widehat{x_n}\}$ 均有界.

事实上：$\forall p \in D$,

$$\begin{aligned}\varphi(p, x_{n+1}) =& \|p\|^2 - 2\langle p, Jx_{n+1}\rangle + \|Jx_{n+1}\|^2 \\ \leq& \alpha_n \|p\|^2 + (1-\alpha_n)\|p\|^2 - 2\alpha_n \langle p, J\overline{x_n}\rangle + \\ & \alpha_n \|J\overline{x_n}\|^2 + (1-\alpha_n)\|J\widehat{x_n}\|^2 - 2(1-\alpha_n)\langle p, J\widehat{x_n}\rangle \\ =& (1-\alpha_n)\varphi(p, \widehat{x_n}) + \alpha_n \varphi(p, \overline{x_n}).\end{aligned} \tag{2}$$

因 $p \in D \subset B^{-1}0$, 由引理 6 有：

$$\varphi(p, \widehat{x_n}) = \varphi(p, Q^B_{r_n} x_n) \leq \varphi(p, x_n) - \varphi(\widehat{x_n}, x_n). \tag{3}$$

因 $p \in D \subset A^{-1}0$, 由引理 6 有：

$$\varphi(p, \overline{x_n}) = \varphi(p, Q^A_{r_n} x_n) \leq \varphi(p, x_n) - \varphi(\overline{x_n}, x_n). \tag{4}$$

把 (3) 和 (4) 代入 (2) 式，有

$$\forall p \in D, \quad \varphi(p, x_{n+1}) \leq \varphi(p, x_n), \tag{5}$$

从而 $\forall p \in D$, $\lim_{n\to\infty} \varphi(p, x_n)$ 存在. 因此 $\{x_n\}$ 是有界序列. 再由 (3) 和 (4) 式及 Lyapunov 泛函的定义知：$\{\overline{x_n}\}$ 和 $\{\widehat{x_n}\}$ 也均为有界序列.

第二步. $\overline{x_n} - x_n \to 0$, $\widehat{x_n} - x_n \to 0$, $n \to \infty$.

由 (3) 知：$\varphi(p, \widehat{x_n}) \leq \varphi(p, x_n)$, 再把 (4) 代入到 (2) 式，有：

$$\varphi(p, x_{n+1}) \leq \varphi(p, x_n) - \alpha_n \varphi(\overline{x_n}, x_n). \tag{6}$$

因 $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n > 0$, 且 $\lim_{n\to\infty} \varphi(p, x_n)$ 存在，故 (6) 式蕴含 $\varphi(\overline{x_n}, x_n) \to 0$, $n \to \infty$. 从而由引理 5, $\overline{x_n} - x_n \to 0$, $n \to \infty$.

由 (4) 式知：$\varphi(p, \overline{x_n}) \leq \varphi(p, x_n)$, 再把 (3) 代入到 (2) 式，有：

$$\varphi(p, x_{n+1}) \leq \varphi(p, x_n) - (1-\alpha_n)\varphi(\widehat{x_n}, x_n). \tag{7}$$

因 $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, 故 (7) 式蕴涵：$\varphi(\widehat{x_n}, x_n) \to 0$, $n \to \infty$. 从而 $\widehat{x_n} - x_n \to 0$, $n \to \infty$.

第三步. 同文献 [9] 中命题 1 可证：存在唯一的 $v \in D$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(v, x_n) = \min_{y \in D} \lim_{n\to\infty} \varphi(y, x_n).$$

第四步. $\lim_{n\to\infty}\varphi(Q_Dx_n,x_n)$ 存在.

由 Q_D 之定义知:

$$\varphi(Q_Dx_{n+1},x_{n+1})\le\varphi(Q_Dx_n,x_{n+1}). \tag{8}$$

类似于 (5) 式的证明过程有: $\varphi(Q_Dx_n,x_{n+1})\le\varphi(Q_Dx_n,x_n)$, 再由 (8) 式知: $\lim_{n\to\infty}\varphi(Q_Dx_n,x_n)$ 存在.

第五步. $Q_Dx_n\to v,n\to\infty$, 这里 $v\in D$ 同于第三步.

由引理 4 知 $\varphi(v,Q_Dx_n)\le\varphi(v,x_n)-\varphi(Q_Dx_n,x_n)$, 从而

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\varphi(v,Q_Dx_n)&\le\lim_{n\to\infty}\varphi(v,x_n)-\lim_{n\to\infty}\varphi(Q_Dx_n,x_n)\\&=h(v)-\lim_{n\to\infty}\varphi(Q_Dx_n,x_n)\le0,\end{aligned}$$

故 $\varphi(v,Q_Dx_n)\to0$, $n\to\infty$. 由引理 5, $Q_Dx_n\to v$, $n\to\infty$.

第六步. $\omega(x_n)\subset D$, 其中 $\omega(x_n)$ 表示 $\{x_n\}$ 所有弱收敛子列的弱极限点全体.

因 E 一致凸且 $\{x_n\}$ 有界, 故 $\omega(x_n)\ne\emptyset$.

设 $x\in\omega(x_n)$, 则存在 $\{x_n\}$ 的某子列, 不妨设 $x_n\rightharpoonup x,n\to\infty$.

从而由第二步知: $\widehat{x_n}\rightharpoonup x,n\to\infty$. 又因 $\widehat{x_n}=Q^B_{r_n}x_n$, 故: 存在 $w^B_n\in B\widehat{x_n}$, 使得 $Jx_n=J\widehat{x_n}+r_nw^B_n$. 因 $\{x_n\}$ 和 $\{\widehat{x_n}\}$ 均有界, 所以由 $\lim_{n\to\infty}r_n=+\infty$ 知: $w^B_n\to0,n\to\infty$. 至此, 利用引理 2 中 $G(B)$ 的次闭性有: $x\in B^{-1}0$.

同理, 由第二步还知: $\overline{x_n}\rightharpoonup x$, $n\to\infty$. 又因 $\overline{x_n}=Q^A_{r_n}x_n$, 故存在 $w^A_n\in A\overline{x_n}$, 使得 $Jx_n=J\overline{x_n}+r_nw^A_n$. 因 $\{x_n\}$ 和 $\{\overline{x_n}\}$ 均有界, 故 $w^A_n\to0$, $n\to\infty$. 从而 $x\in A^{-1}0$. 因此, $x\in D$.

第七步. $x_n\rightharpoonup v$, 其中 v 同于第三步和第五步.

由引理 7 知

$$\forall y\in D,\ \ \langle Q_Dx_n-y,JQ_Dx_n-Jx_n\rangle\le0. \tag{9}$$

由第五步知: $Q_Dx_n\to v,n\to\infty$. 再由引理 1 知: J 为次连续的, 故 $JQ_Dx_n\rightharpoonup Jv,n\to\infty$.

由于 E 自反且 $\{x_n\}$ 有界, 故 $\{x_n\}$ 有弱收敛子列, 设 $x_{n_j}\rightharpoonup x_0$, $j\to\infty$, 由第六步知: $x_0\in D$. 由假设条件又知: $Jx_{n_j}\rightharpoonup Jx_0$, $j\to\infty$. 故对 (9) 式两边取极限得

$$\langle v-y,Jv-Jx_0\rangle\le0,\ \ \forall y\in D.$$

在 (10) 式中取 $y=x_0$, 则: $\langle v-x_0,Jv-Jx_0\rangle\le0$. 因 J 严格单调, 故: $x_0=v$.

设另有一子列 $\{x_{n_l}\}$ 满足 $x_{n_l}\rightharpoonup x_1$, $l\to+\infty$. 则: $x_1\in D$ 且 $Jx_{n_l}\rightharpoonup Jx_1$, $l\to+\infty$. 重复以上过程有: $x_1=v$. 故: $x_n\rightharpoonup v$, $n\to\infty$.

定理 2 设正规对偶算子 $J:E\to E^*$ 弱序列连续, $\{x_n\}$ 是由近似迭代算法 (CPIA) 产生的迭代序列. 假设误差序列 $\{e_n\}\subset E$ 满足: $\|e_n\|\le M,\forall n\ge1$, 其中 $M>0$ 为常数. 进一步假设 $\{r_n\}\subset(0,+\infty)$, $\lim_{n\to\infty}r_n=+\infty$, $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\}\subset[0,1]$ 满足: $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$, $\forall n\ge1$, $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n>0$, $\liminf_{n\to\infty}\beta_n>0$, $\Sigma^\infty_{n=1}\gamma_n<+\infty$, 则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $v\in D$, 其中 v 是满足 (1) 式的唯一元.

证明 第一步. $\{x_n\}$, $\{\overline{x_n}\}$ 和 $\{\widehat{x_n}\}$ 都是有界序列.

同定理 1, $\forall p \in D$,

$$\begin{aligned}\varphi(p,x_{n+1}) \leq & \alpha_n\|p\|^2+\beta_n\|p\|^2+\gamma_n\|p\|^2-2\alpha_n\langle p,J\overline{x_n}\rangle+\\ & \alpha_n\|J\overline{x_n}\|^2+\beta_n\|J\widehat{x_n}\|^2+\gamma_n\|e_n\|^2-\\ & 2\beta_n\langle p,J\widehat{x_n}\rangle-2\gamma_n\langle p,Je_n\rangle\\ = & \beta_n\varphi(p,\widehat{x_n})+\alpha_n\varphi(p,\overline{x_n})+\gamma_n\varphi(p,e_n).\end{aligned} \tag{11}$$

把定理 1 中的 (3) 和 (4) 代入到 (11) 式, 有

$$\varphi(p,x_{n+1}) \leq (1-\gamma_n)\varphi(p,x_n)+\gamma_n\varphi(p,e_n). \tag{12}$$

因 $\|e_n\| \leq M$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n < +\infty$, 故 (12) 式蕴涵 $\forall p \in D$, $\lim_{n\to\infty}\varphi(p,x_n)$ 存在. 因此 $\{x_n\}$ 有界. 从而 $\{\overline{x_n}\}$ 和 $\{\widehat{x_n}\}$ 也有界.

第二步. $\overline{x_n}-x_n \to 0$, $\widehat{x_n}-x_n \to 0$, $n \to \infty$.

由定理 1 的 (3) 式知: $\varphi(p,\widehat{x_n}) \leq \varphi(p,x_n)$, 再把 (4) 代入到 (11) 式, 有

$$\varphi(p,x_{n+1}) \leq (1-\gamma_n)\varphi(p,x_n)-\alpha_n\varphi(\overline{x_n},x_n)+\gamma_n\varphi(p,e_n). \tag{13}$$

因 $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n > 0$, $\|e_n\| \leq M$, $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n < +\infty$ 且 $\lim_{n\to\infty}\varphi(p,x_n)$ 存在, 故 (13) 式蕴含 $\varphi(\overline{x_n},x_n) \to 0$, $n \to \infty$. 从而 $\overline{x_n}-x_n \to 0$, $n \to \infty$.

同理: 由定理 1 中的 (4) 式知: $\varphi(p,\overline{x_n}) \leq \varphi(p,x_n)$, 再把 (3) 代入到 (11) 式, 有:

$$\varphi(p,x_{n+1}) \leq (1-\gamma_n)\varphi(p,x_n)-\beta_n\varphi(\widehat{x_n},x_n)+\gamma_n\varphi(p,e_n). \tag{14}$$

因 $\liminf_{n\to\infty}\beta_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n < +\infty$ 且 $\lim_{n\to\infty}\varphi(p,x_n)$ 存在, 故 (14) 式蕴涵: $\varphi(\widehat{x_n},x_n) \to 0$, $n \to \infty$. 从而 $\widehat{x_n}-x_n \to 0$, $n \to \infty$.

第三步. 同定理 1 可证: 存在唯一的 $v \in D$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(v,x_n)=\min_{y\in D}\lim_{n\to\infty}\varphi(y,x_n).$$

第四步. $\lim_{n\to\infty}\varphi(Q_Dx_n,x_n)$ 存在. 类似于 (12) 式的证明有

$$\varphi(Q_Dx_n,x_{n+1}) \leq (1-\gamma_n)\varphi(Q_Dx_n,x_n)+\gamma_n\varphi(Q_Dx_n,e_n). \tag{15}$$

由引理 4,

$$\varphi(v,Q_Dx_n)+\varphi(Q_Dx_n,x_n) \leq \varphi(v,x_n),$$

其中 $v \in D$ 同于第三步. 因 $\{x_n\}$ 有界, 故 $\{Q_Dx_n\}$ 有界. 从而 (15) 式蕴涵 $\lim_{n\to\infty}\varphi(Q_Dx_n,x_n)$ 存在. 以下证明同定理 1.

注 1 当 $A \equiv 0$ 或 $B \equiv 0$ 时, (CEIA) 和 (CPIA) 分别退化为关于单个极大单调算子零点的精确和近似迭代算法, 比文献 [9] 中对误差序列和迭代参数的限定条件更自然、更易于验证.

注 2 本文定理 1 和 2 的结论可以推广到有限个极大单调算子的情形. 以下给出近似迭代算法 (CPIA) 的推广形式及相应结论:

推论 1 设 $A_i, i=1,2,\ldots,m$, 为极大单调算子且 $D:=\bigcap_{i=1}^m A_i^{-1}0\neq\emptyset$, 设正规对偶算子 $J:E\to E^*$ 弱序列连续，设 $\{x_n\}$ 是由以下近似迭代算法 (CPIA$'$) 产生的迭代序列

$$\begin{cases} x_1\in E, r_{1,i}>0, \quad i=1,2,\ldots,m \\ y_{n,i}=Q_{r_{n,i}}^{A_i}x_n, \quad n\geq 1, i=1,2,\ldots,m \\ x_{n+1}=J^{-1}[\sum\limits_{i=1}^m \alpha_{n,i}Jy_{n,i}+\gamma_n Je_n], \quad n\geq 1. \end{cases} \tag{CPIA'}$$

进一步假设误差序列 $\{e_n\}\subset E$ 满足： $\|e_n\|\leq M$, 其中 $M>0$ 为常数， $\forall n\geq 1$; $\{r_{n,i}\}\subset(0,+\infty)$ 满足 $\lim_{n\to\infty} r_{n,i}=+\infty$, $i=1,2,\ldots,m$; $\alpha_{n,i},\gamma_n\subset[0,1]$ 满足： $\sum_{i=1}^m \alpha_{n,i}+\gamma_n=1$, $\forall n\geq 1$, $\liminf_{n\to\infty}\alpha_{n,i}>0$, $i=1,2,\ldots,m$ 且 $\Sigma_{n=1}^\infty\gamma_n<+\infty$. 则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $v\in D$, 其中 v 是满足 (1) 式的唯一元.

参考文献:

[1] ROCKAFELLAR R T. *Tyrrell Monotone operators and the proximal point algorithm* [J]. SIAM J. Control Optimization, 1976, **14**(5): 877–898.

[2] KAMIMURA S, TAKAHASHI W. *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications* [J]. Set-Valued Anal., 2000, **8**(4): 361–374.

[3] KAMIMURA S, TAKAHASHI W. *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space* [J]. SIAM J. Optim., 2002, **13**(3): 938–945.

[4] HE Bing-sheng, LIAO Li-zhi, YANG Zhen-hua. *A new approximate proximal point algorithm for maximal monotone operator* [J]. Sci. China Ser. A, 2003, **46**(2): 200–206.

[5] MOSCO U. *Perturbation of Variational Inequalities* [M]. 1970 Nonlinear Functional Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVIII, Part 1, Chicago, Ill., 1968) pp. 182–194 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[6] MANN M R. *Mean value methods in iteration* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**: 506–510.

[7] TAKAHASHI W. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[8] PASCALI D, SBURLAN S. *Nonlinear Mappings of Monotone Type* [M]. Sijthoff & Noordhoff, Romania, 1978.

[9] 魏利, 周海云. Banach 空间中极大单调算子零点的带误差项的新迭代格式 [J]. 应用数学，2006, **19**(1): 101–105.
WEI Li, ZHOU Hai-yun. *A new iterative scheme with errors for the zero point of maximal monotone operators in Banach spaces* [J]. Math. Appl. (Wuhan), 2006, **19**(1): 101–105. (in Chinese)

An Iterative Algorithm of Common Zero Points for Two Maximal Monotone Operators in Banach Space

WEI Li[1,2], *ZHOU Hai-yun*[2,3]

(1. School of Mathematics and Statistics, Hebei University of Economics and Business, Hebei 050016, China;
2. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Ordnance Engineering College, Hebei 050003, China;
3. Institute of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Hebei 050016, China)

Abstract: Let E be a real smooth and uniformly convex Banach space with E^* being its duality space. Let $A, B\subset E\times E^*$ be maximal monotone operators with $A^{-1}0\cap B^{-1}0\neq\emptyset$. A new iterative algorithm is introduced which is proved to be weakly convergent to common zero points of maximal monotone operators A and B by using the techniques of Lyapunov functional and generalized projection operator, etc.

Key words: Lyapunov functional; maximal monotone operator; uniformly convex Banach space.