第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0907-06 **文献标识码**: **A**

Banach 空间中非线性 Φ- 伪压缩映象不动点的迭代逼近

王绍荣， 杨泽恒， 熊 明
(大理学院数学与计算机学院，云南 大理 671000)
(E-mail: yndlwsr@yahoo.com.cn)

摘 要: 本文研究了非线性拟 Φ- 伪压缩映象与 Φ- 伪压缩映象的不动点的迭代逼近问题. 研究结果表明：在任意实的 Banach 空间 E 中，拟 Φ- 伪压缩映象与 Φ- 伪压缩映象 T (T 不必连续) 的具误差的 Ishikawa 与 Mann 迭代序列强收敛于 T 的唯一不动点. 所得结果不但改进和推广了最近一些文献的相关结果，而且也改进了定理的证明方法.

关键词: Φ- 伪压缩映象；具误差的 Ishikawa 迭代序列；不动点.
MSC(2000): 47H09; 47H10; 47H17
中图分类: O177.91

1 引言及预备知识

本文中处处设 E 是实的 Banach 空间， E^* 是 E 的对偶空间， $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表 E 与 E^* 间的配对， $F(T)$ 表示 T 的不动点集. 映象 $J:E\to 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象：

$$J(x)=\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|\cdot\|f\|,\|x\|=\|f\|\},\quad x\in E.$$

定义 1.1 设 K 是 E 的非空子集. $T:K\to K$ 是一映象.

(1) T 称为强伪压缩的，如果对 $\forall x,y\in K$, 存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 和常数 $k>0$, 满足

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\le k\|x-y\|^2.$$

不失一般性，不妨设 $k\in(0,1)$.

(2) T 称为 φ- 强伪压缩的，如果对 $\forall x,y\in K$, 存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 和一个严格递增的函数 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, 满足 $\varphi(0)=0$ 使得

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\le\|x-y\|^2-\varphi(\|x-y\|)\cdot\|x-y\|.$$

(3) T 称为 Φ- 伪压缩的 [1], 如果对 $\forall x,y\in K$, 存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 和一个严格递增的函数 $\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, 满足 $\Phi(0)=0$ 使得

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\le\|x-y\|^2-\Phi(\|x-y\|).$$

我们引入比 Φ- 伪压缩映象更一般的拟 Φ- 伪压缩映象如下

收稿日期: 2005-11-08; **接受日期**: 2006-07-03
基金项目: 云南省自然科学基金 (2006A0089M).

定义 1.2 设 K 是 E 的非空子集. $T:K\to K$ 是一映象, 设 $F(T)\neq\Phi$. 则 T 称为拟 Φ- 伪压缩的, 如果对 $\forall x\in K,\forall q\in F(T)$, 存在 $j(x-q)\in J(x-q)$ 和一个严格递增的函数 $\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, 满足 $\Phi(0)=0$ 使得

$$\langle Tx-q,j(x-q)\rangle\leq\|x-q\|^2-\Phi(\|x-q\|). \tag{1.1}$$

注 1.1 由定义不难看出, 如果拟 Φ- 伪压缩映象存在不动点, 则其不动点必是唯一的. 强伪压缩映象必是 φ- 强伪压缩映象 (只需取 $\varphi(s)=(1-k)s, 0<k<1$); φ- 强伪压缩映象必是 Φ- 伪压缩映象 (只需取 $\Phi(s)=\varphi(s)\cdot s$); 当 $F(T)\neq\Phi$ 时, Φ- 伪压缩映象必是拟 Φ- 伪压缩映象.

定义 1.3 设 K 是 E 的非空凸集, $T:K\to K$ 是一映象, $x_0\in K$ 是任一给定的点. $\{u_n\},\{v_n\}$ 是 K 中的有界序列; $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\},\{\alpha'_n\},\{\beta'_n\},\{\gamma'_n\}$ 都是 $[0,1]$ 中的数列, 且满足 $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=\alpha'_n+\beta'_n+\gamma'_n=1, \forall n\geq 0$. 则

(1) 由下式定义的序列 $\{x_n\}$ 称为 T 的具误差的 Ishikawa 迭代序列

$$\left.\begin{array}{l}x_{n+1}=\alpha_nx_n+\beta_nTy_n+\gamma_nu_n\\ y_n=\alpha'_nx_n+\beta'_nTx_n+\gamma'_nv_n\end{array}\right\}\quad n\geq 0. \tag{1.2}$$

特别, 当 $\gamma_n=\gamma'_n=0, \forall n\geq 0$. 由 (1.2) 定义的序列 $\{x_n\}$ 称为 T 的 Ishikawa 迭代序列;

(2) 当 $\gamma'_n=\beta'_n=0, \forall n\geq 0$. 由下式定义的序列 $\{x_n\}$ 称为 T 的具误差的 Mann 迭代序列

$$x_{n+1}=\alpha_nx_n+\beta_nTx_n+\gamma_nu_n,\quad n\geq 0. \tag{1.3}$$

徐裕光教授在文献 [1] 中引入了比重要的 φ- 强伪压缩映象更一般的 Φ- 伪压缩映象. 并给出了以下定理 (文献 [1] 中定理 2.1, 定理 2.3).

定理 1.1 设 X 是一致光滑的 Banach 空间, $K\subset X$ 是非空有界凸子集, $T:K\to K$ 是 Φ- 伪压缩映象. 如果 q 是 T 的不动点且由 (1.2) 式定义的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 满足

(i) $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\beta'_n=\lim_{n\to\infty}\gamma'_n=0$;

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n=+\infty$ 和 $\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n<+\infty$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点.

定理 1.2 设 E 是任意的实 Banach 空间, E^* 是其对偶空间, $K\subset X$ 是非空有界凸子集, $T:K\to K$ 是一致连续的 Φ- 伪压缩映象. 假设由 (1.2) 式定义的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 满足

(i) $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$ 和 $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n=+\infty$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}\beta'_n=0$;

(iii) $\lim_{n\to\infty}\gamma'_n=0$ 和 $\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n<+\infty$,

如果 $F(T)\neq\Phi$, 则对任意的 $x_0\in K$, $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点.

关于以上定理, 我们认为: (1) 定理 1.1 中的条件 "X 是一致光滑的 Banach 空间" 可减弱为 "X 是一任意实的 Banach 空间"; 定理 1.2 中的条件 "$T:K\to K$ 是一致连续的" 是不必要的; (2) 两个定理中的 "$T:K\to K$ 是 Φ- 伪压缩映象", 可推广为更一般的 "$T:K\to K$ 是拟 Φ- 伪压缩映象"; (3) 定理 1.1 和定理 1.2 的证明的最后部分中, 由 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_j}\}$ 收敛于 q, 证明 $\{x_n\}$ 也收敛于 q 时, 实际上用到 "只要证对任给 $k\in N$, 序列 $\{x_{n_j+k}\}$ 当 $j\to\infty$ 都收敛于 q"; 这是不成立的. 例如, 对于数列:

$$\{x_n\}:1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,\ldots;$$

取第 2 项，第 4 项，第 7 项，第 11 项，第 16 项 (即所有 1 后面的第一项)$\cdots$, 得 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_j}\}=\{0\}$, 显然， $x_{n_j}\to 0\,(j\to\infty)$. 对任意 $k\in N$, 序列 $\{x_{n_j+k}\}$ 中除第 k 项为 1 外，其余的所有项都为 0, 故： $x_{n_j+k}\to 0\,(j\to\infty)$; 但 $\lim_{n\to\infty}x_n\neq 0$ (这里 $\{x_n\}$ 发散). 因此，定理最后部分的证明是有问题的.

本文不但将文献 [1] 中定理 1.1 的条件 "X 是一致光滑的 Banach 空间" 减弱为 "X 是一任意实的 Banach 空间", 并且去掉了定理 1.2 中的条件 "$T:K\to K$ 是一致连续的"; 还将 T 由 Φ- 伪压缩映象推广到了 T 是更一般的拟 Φ- 伪压缩映象. 并且改进和简化了定理的证明，使定理的证明更严谨和简洁. 所得结果也改进和推广了文献 [2]–[6] 的相关结果.

为了给出本文主要定理的证明，先给出以下引理

引理1.1[7] 设 E 是一实的 Banach 空间，则有

$$\|x+y\|^2\leq\|x\|^2+2\left\langle y,j\left(x+y\right)\right\rangle,\quad\forall x,y\in E,\quad\forall j\left(x+y\right)\in J\left(x+y\right).$$

其中 $J:E\to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象.

引理 1.2 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是非负数列，且 $\exists N_0\in N_+$, $\forall n\geq N_0$ 有：

$$a_{n+1}\leq a_n+b_n$$

成立. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n<+\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在.

2 主要结果

定理 2.1 设 E 是任意的实 Banach 空间， $K\subset X$ 是非空有界凸子集， $T:K\to K$ 是拟 Φ- 伪压缩映象. 如果 $F(T)\neq\Phi$, $\{x_n\}$ 是由 (1.2) 式定义的具误差的 Ishikawa 迭代序列，且满足

(i) $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n'=\lim_{n\to\infty}\gamma_n'=0$;

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n=+\infty$ 且 $\gamma_n=o(\beta_n)$, $(n\to\infty)$;

(iii) $\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n<+\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n^2<+\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n\beta_n'<+\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n'\gamma_n'<+\infty$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点.

证明 由定义 1.2 的注 1.1 知， T 的不动点是唯一的，设为 q. 由于 K 有界，故 $\exists M>0$, 对 $\forall x\in K$, 有

$$\|x\|\leq M. \tag{2.1}$$

由于 $\gamma_n=o(\beta_n)$, 故 $\exists c_n>0$, 且 $c_n\to 0\,(n\to\infty)$, 使得 $\gamma_n=c_n\cdot\beta_n$. 由引理 1.1 及 (1.2) 式有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2&=\|\alpha_n(x_n-q)+\beta_n(Ty_n-q)+\gamma_n(u_n-q)\|^2\\&\leq(1-\beta_n-\gamma_n)^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n\langle Ty_n-q,j(x_{n+1}^{-}q)\rangle+2\gamma_n\langle u_n-q,j(x_{n+1}-q)\rangle\\&\leq(1-\beta_n)^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n\langle Ty_n-q,j(x_{n+1}^{-}y_n)\rangle+2\beta_n\langle Ty_n-q,j(y_n-q)\rangle+\\&\quad 2\gamma_n\langle u_n-q,j(x_{n+1}-q)\rangle.\end{aligned}\tag{2.2}$$

现估计 (2.2) 式右边各项，右边第四项

$$2\gamma_n\left\langle u_n-q,j\left(x_{n+1}-q\right)\right\rangle\leq 2\gamma_n\left\|u_n-q\right\|\cdot\left\|x_{n+1}-q\right\|\leq 2M^2\gamma_n=2M^2c_n\cdot\beta_n. \tag{2.3}$$

右边第三项, 由 (1.1) 式有

$$\begin{aligned}
&2\beta_n\langle Ty_n-q,j(y_n-q)\rangle\\
&\quad=2\beta_n\{\langle Ty_n-q,j(y_n-q)\rangle-\|y_n-q\|^2+\Phi(\|y_n-q\|)\}+2\beta_n\{\|y_n-q\|^2-\Phi(\|y_n-q\|)\}\\
&\quad\le 2\beta_n\{\|y_n-q\|^2-\Phi(\|y_n-q\|)\}.
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\|y_n-q\|^2&=\|\alpha_n'(x_n-q)+\beta_n'(Tx_n-q)+\gamma_n'(v_n-q)\|^2\\
&\le(1-\beta_n'-\gamma_n')^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n'\langle Tx_n-q,j(y_n-q)\rangle+2\gamma_n'\langle v_n-q,j(y_n-q)\rangle\\
&\le(1-\beta_n')^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n'\langle Tx_n-q,j(y_n-x_n)\rangle+2\beta_n'\langle Tx_n-q,j(x_n-q)\rangle+\\
&\quad 2\gamma_n'\langle v_n-q,j(x_n-q)\rangle\\
&\le\left(1+{\beta_n'}^2\right)\|x_n-q\|^2+2M^2\beta_n'+2\beta_n'\left\{\|x_n-q\|^2-\Phi(\|x_n-q\|)\right\}+2M^2\gamma_n'\\
&\le\left(1+{\beta_n'}^2\right)\|x_n-q\|^2+2M^2(\beta_n'+\gamma_n')+2\beta_n'\|x_n-q\|^2.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
2\beta_n\langle Ty_n-q,j(y_n-q)\rangle\le&2\beta_n\left(1+{\beta_n'}^2\right)\|x_n-q\|^2+4M^2\beta_n(\beta_n'+\gamma_n')+\\
&4\beta_n\beta_n'\|x_n-q\|^2-2\beta_n\Phi(\|y_n-q\|).
\end{aligned}\tag{2.4}$$

右边第二项, 因

$$\begin{aligned}
&2\beta_n\langle Ty_n-q,j(x_{n+1}-y_n)\rangle\le2\beta_n\|Ty_n-q\|\cdot\|x_{n+1}-y_n\|\le2\beta_nM\|x_{n+1}-y_n\|\\
&\quad\le2M\beta_n\{\|x_{n+1}-x_n\|+\|x_n-y_n\|\}\\
&\quad\le2M\beta_n\{[\beta_n\|Ty_n-x_n\|+\gamma_n\|u_n-x_n\|]+[\beta_n'\|Tx_n-x_n\|+\gamma_n'\|v_n-x_n\|]\}\\
&\quad\le2M^2\beta_n(\beta_n+\gamma_n+\beta_n'+\gamma_n').
\end{aligned}\tag{2.5}$$

将 (2.3)–(2.5) 代入 (2.2) 式得:

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-q\|^2\le(1-\beta_n)^2\|x_n-q\|^2+2M^2\beta_n(\beta_n+\gamma_n+\beta_n'+\gamma_n')+2M^2\beta_nc_n+\\
&\qquad2\beta_n\left(1+{\beta_n'}^2\right)\|x_n-q\|^2+4M^2\beta_n(\beta_n'+\gamma_n')+4\beta_n\beta_n'\|x_n-q\|^2-2\beta_n\Phi(\|y_n-q\|)\\
&\quad=\|x_n-q\|^2+\beta_n\left(\beta_n^{+}2{\beta_n'}^2+4\beta_n'\right)\cdot\|x_n-q\|^2+2M^2\beta_n(\beta_n+\gamma_n+\beta_n'+\gamma_n')+\\
&\qquad2M^2\beta_nc_n+4M^2\beta_n(\beta_n'+\gamma_n')-2\beta_n\Phi(\|y_n-q\|)\\
&\quad\le\|x_n-q\|^2+M^2\beta_n(\beta_n'+2\beta_n'+4\beta_n')+2M^2\beta_n(\beta_n+\gamma_n+\beta_n'+\gamma_n')+\\
&\qquad2M^2\beta_nc_n+4M^2\beta_n(\beta_n'+\gamma_n')-2\beta_n\Phi(\|y_n-q\|)\\
&\quad\le\|x_n-q\|^2+M^2\beta_n(3\beta_n+2\gamma_n+12\beta_n'+6\gamma_n'+2c_n)-2\beta_n\Phi(\|y_n-q\|)\\
&\quad=\|x_n-q\|^2+A_n\beta_n-2\beta_n\Phi(\|y_n-q\|),
\end{aligned}\tag{2.6}$$

其中 $A_n=M^2(3\beta_n+2\gamma_n+12\beta_n'+6\gamma_n'+2c_n)\to0\ (n\to\infty)$, 且由已知条件知 $\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\beta_n<+\infty$. 由 (2.6) 式可得 $\|x_{n+1}-q\|^2\le\|x_n-q\|^2+A_n\beta_n$, 而 $\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\beta_n<+\infty$, 据引理 1.2 知, $\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|$ 存在.

下证 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|=0$, 即 $\lim_{n\to\infty}x_n=q$.

设： $\delta=\inf\{\|y_n-q\|:n\geq 0\}$, 则： $\delta\geq 0$. 现证 $\delta=0$. 设： $\delta>0$, 则 $\forall n\geq 0$, 有 $\|y_n-q\|\geq\delta$. 从 φ 的严格增加性可得： $\forall n\geq 0$, 有 $\varphi(\|y_n-q\|)\geq\varphi(\delta)>0$. 从而由 (2.6) 式，有

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leq\|x_n-q\|^2+A_n\beta_n-2\beta_n\Phi(\delta). \tag{2.7}$$

因为 $A_n\to 0\,(n\to\infty)$, 故： $\exists n_0\in N,\forall n\geq n_0, A_n\leq\varphi(\delta)$, 于是由 (2.7) 式可得

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leq\|x_n-q\|^2-\beta_n\Phi(\delta),\quad\forall n\geq n_0.$$

即 $\beta_n\Phi(\delta)\leq\|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$, 从而有 $\Phi(\delta)\sum_{n=n_0}^{\infty}\beta_n\leq\|x_{n_0}-q\|^2$. 与条件 $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n=+\infty$ 相矛盾，故 $\delta=0$; 即 $\delta=\inf\{\|y_n-q\|:n\geq 0\}$=0. 因此，存在 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_i}\}$ 使得： $\|y_{n_i}-q\|\to 0,(i\to\infty)$. 又 $\|y_{n_i}-x_{n_i}\|\leq\beta'_{n_i}\|Tx_{n_i}-x_{n_i}\|+\gamma'_{n_i}\|v_{n_i}-x_{n_i}\|\to 0\ \ (i\to\infty)$. 故 $\|x_{n_i}-q\|\to 0\ \ (i\to\infty)$. 又已证： $\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|$ 存在，故 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|=0$, 即 $\lim_{n\to\infty}x_n=q$. □

在定理 2.1 中，当 $\gamma_n=\gamma'_n=0,\forall n\geq 0$ 时，可得

定理 2.2 设 E 是任意的实 Banach 空间， $K\subset X$ 是非空有界凸子集， $T:K\to K$ 是拟 Φ- 伪压缩映象．如果 $F(T)\neq\Phi$, $\{x_n\}$ 是由 (1.2) 式定义的 Ishikawa 迭代序列，且满足

(i) $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\beta'_n=0$;

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n=+\infty$;

(iii) $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n^2<+\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n\beta'_n<+\infty$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点.

在定理 2.1 中，当 $\beta'_n=\gamma'_n=0,\forall n\geq 0$ 时，可得

定理 2.3 设 E 是任意的实 Banach 空间， $K\subset X$ 是非空有界凸子集， $T:K\to K$ 是拟 Φ- 伪压缩映象．如果 $F(T)\neq\Phi$, $\{x_n\}$ 是由 (1.3) 式定义的具误差的 Mann 迭代序列，且满足

(i) $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$;

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n=+\infty$ 且 $\gamma_n=o(\beta_n)$, $(n\to\infty)$;

(iii) $\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n<+\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n^2<+\infty$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点.

由于，强伪压缩映象、 φ- 强伪压缩映象、 Φ- 伪压缩映象都是拟 Φ- 伪压缩映象．因此将定理 2.1–2.3 中的条件： “$T:K\to K$ 是拟 Φ- 伪压缩映象”, 换成： “$T:K\to K$ 是强伪压缩映象” 或 “$T:K\to K$ 是 φ- 伪压缩映象” 或 “$T:K\to K$ 是 Φ- 伪压缩映象” 时，结论显然成立.

注 本文的结果不但大大减弱了徐裕光 [1] 相应定理中的条件，而且也改进了定理的证明方法．从而推广和发展了近期一些文献的相关成果.

参考文献:

[1] 徐裕光．非线性 φ- 伪压缩映象不动点的具误差的迭代过程 [J]. 数学物理学报 (A 辑), 2004, **24**(6): 730–736. XU Yu-guang. *Iterative processes with errors for fixed points of nonlinear φ-pseudocontractive mappings* [J]. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2004, **24**(6): 730–736. (in Chinese)

[2] ZHANG Shi-sheng, CHO Y J, LEE B S. et al. *Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo-contractive mappings in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **224**(1): 149–165.

[3] CHIDUME C E. *Approximation of fixed points of strongly pseudocontractive mappings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, **120**(2): 545–551.
[4] LIU Li-shan. *Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **194**(1): 114–125.
[5] ZHOU H. *Some convergence theorems for the Ishikawa iterative sequences of certain nonlinear operators in uniformly smooth Banach spaces* [J]. Acta Math Sinica, 1997, **40**: 751–758.
[6] 柴国庆. Banach 空间中非线性迭代序列的收敛定理 [J]. 数学物理学报, 1998, **18**: 459–466.
CHAI Guo-qing. *Convergence theorems for a class of Ishikawa iterative sequences of nonlinear operators in Banach spaces* [J]. Acta Math. Sci., 1998, **18**(4): 459–466. (in Chinese)
[7] ZHANG Shi-sheng. *On Chidume's open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, **216**(1): 94–111.

Iteration Approximation for Fixed Point of Nonlinear Φ-Pseudocontractive Mappings in Banach Spaces

WANG Shao-rong, YANG Ze-heng, XIONG Ming
(College of Mathematics and Computer, Dali University, Yunnan 671000, China)

Abstract: This paper deals with the iteration approximation problem of fixed point for the nonlinear quasi-Φ-pseudocontractive mappings and Φ-pseudocontractive mappings. The results presented in this paper show that the quasi-Φ-pseudocontractive mapping and Φ-pseudocontractive mapping T (T may not be continuous) of the Ishikawa and Mann iterative sequences with errors converges strongly to the unique fixed point of T in an arbitrary real Banach space E. Our results improve and extend some recent results, and improve the methods of proof.

Key words: Φ-pseudocontractive mappings; Ishikawa iteration sequence with errors; fixed points.