

George Green 对早期孤立子数学理论的重要贡献

王丽霞

(北京邮电大学理学院, 北京 100876)

(E-mail: wlx@fortune.cn.com)

摘要: 本文考察 George Green 1839 年关于孤立波的论文的产生背景、研究方法及其影响. Green 自身的科学素养、剑桥的氛围以及罗素的报告促成了他的孤立波研究, 其基本思想和处理方法被 19 世纪一些重要的孤立波研究者不同程度继承借鉴, 对孤立波理论研究产生了重要影响.

关键词: Green; 孤立波; 长波; KdV 方程.

MSC(2000): 01A55

中图分类号: O11

孤立波问题是当今非线性科学的重要前沿之一. 自 1834 年 8 月苏格兰造船工程师 J. S. Russell (1808–1882) 首次观察到孤立波现象至今, 人们对孤立波现象的研究已经历了 170 多年的历程. 自从孤立波走入人们的视野, 数学家们就试图给出孤立波的数学解释、建立孤立波的数学理论, 而格林 (George Green, 1793–1841) 发表于 1839 年的《关于渠中水波的注记》¹ (简称《注记》)^[1, p271–280] 是迄今所知发表最早的一篇有关论文. 也许由于它在格林的全部工作中分量不是很重 – 它看起来不过是格林 1837 年发表的关于水波的短文² 的补充注记, 而且与现代孤立波理论又相去甚远, 这篇短文在以往对格林工作的研究中没有得到足够的重视, 在孤立波理论发展中的作用也被长期忽视.

我们知道, 格林一生共发表了 10 篇数学论文却“包含了影响 19 世纪数学物理发展的宝贵思想”^[2]. 笔者看到, 1871 年出版的《格林数学论文集》^[1] 收录了格林的全部数学论文并在其《前言》中对格林的绝大部分工作给予了相对详尽的评价, 但对上述《注记》仅有的介绍是“1839 年给出了它² 的一个补充”. 1970 年代以后, 陆续出现了许多剖析和挖掘格林工作的文章. 总的说来, 研究者们普遍关注、深入研究和高度赞扬格林的位势理论、电磁理论以及光波和声波理论, 认为这些研究是格林最好和最重要的工作. 对此, 笔者没有异议但不拟深入探讨. 笔者也看到个别研究者在述及格林的“其它工作”时简要评论他关于水波的第一篇论文《论具有较小深度和宽度的可变水渠中波的运动》(简称《论波的运动》), 但对《注记》倘有提及也往往一语带过^[2,9].

然而, 作为迄今所知发表最早的孤立波的数学解释, 《注记》却引起了笔者的兴趣. 经过仔细研究, 笔者认为这篇论文对 19 世纪孤立波理论研究有不可忽视的影响, 为此本文拟对其产生

收稿日期: 2005-12-27; 接受日期: 2007-01-16

基金项目: 国家自然科学基金 (10371119).

¹ 剑桥哲学学会 1839 年 2 月 18 日收到.

² 指《论具有较小深度和宽度的可变水渠中波的运动》^[1, p223–230]

背景及影响进行分析探讨.

1 格林研究孤立波的主客观条件

笔者首先感兴趣的是, 孤立波似乎与格林的主要工作相距甚远, 那么格林何以会率先发表孤立波的数学解释呢? 经过研究, 笔者发现这其实并非偶然. 简言之, 自身的科学素养、剑桥的研究氛围以及罗素的水波研究报告等因素使格林成为了孤立波理论研究的先驱之一.

首先, 笔者认为, 密切注视、敏锐把握自己时代的科学热点, 并创造性地应用纯熟的流体分析方法解决其中的问题是格林科学研究的一个突出特点. 对此, 格林关于电磁理论以及光波和声波的研究等都是有力的例证.

其次, 1833年, 40岁的格林如愿成为剑桥大学学生时, 剑桥大学正处于数学史上最辉煌的时期之一^[3], 而且英国水波研究经过一个多世纪的衰微正在剑桥复兴. 特别值得一提的是, 剑桥天文学家 J. Challis 当年向英国科学促进会做了关于《流体动力学和波》的报告, 并以当时无法解释的“流体阻力悖论”提示流体力学的发展潜力^[4]. 这使格林立即意识到流体运动问题是分析力学中最困难、最少成果因而也最大有可为的领域, 并认为若将有关研究与 Laplace 关于潮汐的研究结合起来将会得到一些重要结果^[1, p315]. 同年 12 月 16 日, 他向皇家爱丁堡学会递交论文《关于流体介质中摆的振动研究》^[1, p313-324]. 笔者认为这篇论文其实是格林研究水波问题的肇始.

再者, 1834年 J. S. Russell 观察到孤立波, 1836年英国科学促进会任命“波动委员会”等事件很可能进一步激发了格林对水波的研究兴趣, 使他在 1837年 5 月向剑桥哲学学会提交了《论具有较小深度和宽度的可变水渠中波的运动》^[1, p223-230]. 1837年 9 月英国科学促进会 Liverpool 会议召开, “波动委员会”第一篇水波研究报告《论水波》发表. 《论水波》包括了波动委员会成立前两年罗素的研究结果以及波动委员会一年来的研究结果, 内容非常丰富. 这篇研究报告显然引起了格林对孤立波的关注, 而且他注意到罗素的孤立波与他在《论波的运动》中讨论的浅水长波很相似, 于是从《论波的运动》出发解释孤立波现象就成为了《注记》的一个重要内容.

2 格林对孤立波的数学解释

格林在毕业前向剑桥哲学学会提交的《论波的运动》“虽然简短但却很有意思”^[1, pvii], 充分展示了他作为“剑桥数学物理学派开山祖师”^[3, p126] 抓住本质简化问题、建立求解数学模型的非凡能力. 他非常清楚当时分析工具的局限和水波理论研究面临的困难, 因此明确限定于讨论矩形截面水渠中的浅水长波. 他假定波沿渠宽方向 y 和水深方向 z 的尺寸非常小, 水渠“窄而浅且无限延伸”, 并将“缓慢变化”的水渠宽度 β 、深度 γ 表示为 ωx 的函数 (ω 是非常小的量, x 是沿渠长方向的位移), 再令水面对平衡位置的位移的一阶近似 $\varphi_0 = Af(t+X)$ (A 也是 ωx 的函数), 从而导出了二阶线性浅水波方程, 并解得

$$\varphi_0 = \beta^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-\frac{1}{4}} \left\{ f\left(t + \int \frac{dx}{\sqrt{g\gamma}}\right) + F\left(t - \int \frac{dx}{\sqrt{g\gamma}}\right) \right\},$$

其中, f 与 F 是任意函数. 波高

$$\zeta = \frac{d\varphi_0}{gdt} = \frac{\beta^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-\frac{1}{4}}}{g} \left\{ f'\left(t + \int \frac{dx}{\sqrt{g\gamma}}\right) + F'\left(t - \int \frac{dx}{\sqrt{g\gamma}}\right) \right\}.$$

《论水波》发表后,格林注意到罗素的孤立波与他讨论过的长波很相似,便以《论波的运动》的理论和结论为依据解释孤立波现象:“我在先前的一个通讯中……假定实际液面超出平衡液面的值 ζ 相对于液体深度非常小;水深 γ 和水渠宽度 β 与波长相比均较小……在罗素先生称为‘大孤波’的……情形,这些假设是成立的”。为了更仔细地考察孤立波传播的方式,格林去掉他在《论波的运动》里得到的解中沿 x 轴负方向传播的波 f , 然后假设 β 和 γ 为常数,并取 x 的原点为 $t = 0$ 时波开始的地方,得到

$$\varphi = F(x - t\sqrt{g\gamma}), \quad \zeta = \frac{d\varphi}{gdt} = -\sqrt{\frac{\gamma}{g}}F'(x - t\sqrt{g\gamma}).$$

格林借此结果解释了 Russell 观察到的孤立波传送流体粒子的奇特性质并计算了流体粒子被传送的距离.接着,格林考虑了截面为直角三角形的水渠:“取水渠的水平底为 x 轴,并取 z 轴垂直向上,这种情形的小振动的一般方程变为…… $0 = \frac{d^2\varphi_0}{dt^2} - \frac{gc}{2} \frac{d^2\varphi_0}{dx^2}$, 它沿 x 轴正向前进的波解为 $\varphi_0 = f(x - t\sqrt{gc/2})$, 因此波传播的速度为 $v' = \sqrt{gc/2}$ ”.格林在《注记》中还将《论波动》中所有满足 $\zeta < \frac{c}{20}$ 的波的观测值与其理论计算结果进行比较,并满意地说“很难期望有比这更完美的理论吻合了”^[1, p79].

3 格林关于孤立波数学论文的局限、意义及影响

我们知道格林认为孤立波包含在线性长波理论中的观点并不正确,他用线性方程描述孤立波也不能很好解释孤立波的独特性质.他的计算之所以能与罗素的实验结果吻合,主要在于当波的高度非常小时,长波理论在一阶近似下可以给出与实验一致的传播速度^[5].尽管如此,笔者还是认为这篇论文对 19 世纪孤立波理论研究有着重要影响.这是因为,首先,格林的这篇论文发表后,英国“大量一流人才”纷纷发表文章探讨孤立波的数学解释^[6].事实上, P. Kelland, G.B. Airy, S.Earnshaw, Stokes, Lord Rayleigh, Korteweg 和 de Vries 等,分别给出了孤立波的各种各样的数学解释.种种迹象表明,这些工作大多数都与格林的上述工作有关.

另外,笔者发现《注记》中处理孤立波的基本思想和方法被 19 世纪一些重要的孤立波研究者不同程度地继承、借鉴.例如, S. Earnshaw 于 1845 年尝试在与格林基本相同的假设下给出孤立波的非线性理论,但他研究的运动因为有分子旋转而出现了波与静水交界处压力不连续的尴尬^[7]; Stokes 熟悉格林关于水波理论的工作,并在 1846 年“关于流体力学新进展”的报告中多次引证格林的上述工作^[5], 后来还多次涉足孤立波的理论研究^[4]; Lord Rayleigh 由于认识到了传统长波理论“不可能满足有限高度波的表面条件”,因此转而研究“波长适中、高度有限的波”,通过“由高度有限性引起的上表面压力变化与因背离适合长波的水平速度一致性定律引起的变化之间的补偿”,并采用格林对缓变因素的分析方法^[7],建立了孤立波的一个“可靠的近似理论”,导出了 KdV 方程(但形式不同)并得到了 sech^2 型的孤波即罗素的孤立波解^[8];而荷兰数学家 Korteweg 和 de Vries 则在其 1895 年的著名论文中如格林一样只考虑单向波并取得令人瞩目的成就.

综上所述,笔者认为,格林关于孤立波的先驱性工作不仅客观上起到了迅速引起其他数学家关注孤立波数学解释的作用,而且为后来的研究者提供了一些可资借鉴的思想和方法,因此从这个意义上说《注记》对 19 世纪孤立波理论的研究有着不容忽视的影响.

感谢北京邮电大学理学院领导及同事对本工作的支持和帮助. 特别感谢本人的导师中国科

学院数学与系统科学研究院研究员李文林教授提供部分原始文献并给予热情鼓励和悉心指导.

参考文献:

- [1] FERRERS N M. *Mathematical Papers of the Late George Green* [M]. Mac. and co., 1871.
- [2] 吴文俊. 世界著名数学家传记 [M]. 北京: 科学出版社, 1995, 828–835.
WU Wen-jun. *Biography of the Famous Mathematicians* [M]. Beijing: Science Press, 1995, 828–835. (in Chinese)
- [3] 李文林. 数学的进化 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
LI Wen-lin. *The Evolution of Mathematics* [M]. Beijing: Science Press, 2005. (in Chinese)
- [4] DARRIGOL O. *The spirited horse, the engineer, and the mathematician: water waves in nineteenth-century hydrodynamics* [J]. Arch. Hist. Exact Sci., 2003, **58**: 12–95.
- [5] STOKES G G. *Report on Recent Researches in Hydrodynamics* [C]. The British Association for the Advancement of Science. Annual report. 1846, Part I: 157–187.
- [6] CRAIK A D D. *The origins of water wave theory* [J]. Annu. Rev. Fluid Mech., 2004, **36**: 1–28.
- [7] RAYLEIGH L. *On waves* [J]. Phil. Mag. S. 5. Vol. 1. No. 4. April 1876, 257–179.
- [8] MCCOWAN J. *On the solitary wave* [J]. Phi. Mag., 1891, **32**: 45–58.
- [9] FARINA J E G. *The work and significance of George Green, the miller mathematician* [J]. Bull. Inst. Math. Appl., 1976, **12**(4): 98–105.

Some Historic Notes on An Important Early Paper about the Solitary Wave

WANG Li-xia

(School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: This paper examines the background, method and influence of G. Green's paper about the solitary wave. It is shown that the paper was generated by Green's ability, Cambridge's atmosphere and Russell's report, and some of his basic ideal and methods were followed by later researchers in the 19th century.

Key words: G. Green; solitary wave; long wave; KdV equation.