第24卷 第2期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 24, No. 2
1995年6月　　J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)　　Jun. , 1995

弱反馈控制下DUFFING系统的浑沌现象

章　琪　　　陈　忠
(上海财经大学金融系)　　(上海交通大学)

提　要　本文证明了在充分条件假设下某类高维系统 Melnikov 函数的收敛性. 运用分析方法证实了一类推广 Duffing 系统的同宿解关于 t 显式解存在且有界, 给出了浑沌存在的参数区域和电脑演示图.

关键词　浑沌; Melnikov 函数; 横截交
中图法分类号　O175.1

1　高维 *Melnikov* 函数收敛性

考察系统

$$q' = f(q) + \varepsilon g(q, \mu, \varepsilon) \tag{1.1$_\varepsilon$}$$

其中, $f \equiv (JD_xH, 0, \Omega)$, $g \equiv (g^x, g^I, g^\theta)$, $q \equiv (x, I, \theta) \in R^{2n} \times R^m \times R^l$, $0 < \varepsilon << 1$, 并且这些函数均在有界域上充分可微, $H = H(x, I)$ 是一个 m 个参数的哈密顿系统, J 是 $m \times 2n$ 的辛矩阵.

现假设

A　$$\dot{x} = JD_xH(x, I) \tag{1.1$_0$}$$

$\forall\ I \in U \subset R^m$, 该系统完全可积; 在 R^{2n} 上, $\forall\ i, j$, $\langle JD_xK_i,\ D_xK_j \rangle = 0$

B　$(1.1)_0$ 系统具有双曲不动点, 且随 I 光滑变动并有 n 维同宿流形与之连接. 用 $x^I(t, \alpha)$ 表示同宿轨道, $I \in R^l$, $\alpha \in R^{n-1}$.

在这些假设下容易得到双曲不变流形:

$M = \{(x, I, Q) \in R^{2n} \times R^m \times T^l \mid x \in \gamma(I), \gamma(I)$ 满足 $D_xH(\gamma(I), I) = 0, \det(D_x{}^IH(\gamma(I), I)) \neq 0, \theta \in T^l, I \in U\}$, 并可采用平均方法来讨论摄动后 M_ε 上的动力现象[1].

命题 1.1　系统 $(1.1)_\varepsilon$ 对应的 Melnikov 函数收敛.

证明　系统 $(1.1)_\varepsilon$ 的 Melnikov 函数可表示如下

$$M^I(\theta, \alpha, \mu) = (M_1^I(\theta, \alpha, \mu), \cdots, M_n^I(\theta, \alpha, \mu)) \tag{1.2}$$

其中

$$M_i^I(\theta, \alpha, \mu) = \langle D_xK_i(x^I(t - t_0, \alpha), I), x_1^{u} - x_1^{s} \rangle \tag{1.3}$$

那么进一步简化(1.3)式可得

本文于1993年4月14日收到.

$$M_i^I(\theta,\alpha,\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}[<D_xK_i,g^x>+<D_xK_i,(D_IJD_xH)\int^t g^I>](q_0,\mu,0)\mathrm{d}t \quad (1.4)$$

$\because$ $\dot{x}=JD_xH(x,I)$完全可积的$Hamilton$系统，不妨设$K_i=K_i(x_1,\cdots,x_n)$是它的一个积分

$\therefore$ $\exists$ x_j，使得$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial K_i}{\partial x_i}$或$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial K_i}{\partial x_i}$

其中，i,j为1至$2n$的正整数．

不失一般性可取

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial K_i}{\partial x_i} \quad (1.5)$$

由假设B得，$K_i=K_i(x_1,\cdots,x_{2n})$是过$(\gamma(I),I)$，则$K_i(x_1,\cdots,x_{2n})=K_i(\gamma(I))$是一个闭曲面．

$\therefore$ $\exists$ $M,N>0$，使得$-N<x_j<M$，$\forall$ j

$\therefore$ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_i}{\partial x_i}g_i^x\mathrm{d}t=\int_{-N}^{M}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}g_i^x\mathrm{d}t=\int_{-N}^{M}g_i^x\mathrm{d}x_j$

由于g^x在有界域上有界，则$\int_{-N}^{M}g_i^x\mathrm{d}x_j$收敛．

$\therefore$ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_i}{\partial x_j}g_i^x\mathrm{d}t$收敛．

$\therefore$ $\int_{-\infty}^{\infty}<D_xK_i,g^x>(q_0,\mu,0)\mathrm{d}t$

$=\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\partial K_i}{\partial x_1}g_1^x+\cdots+\frac{\partial K_i}{\partial x_{2n}}g_{2n}^x)(q_0,\mu,0)\mathrm{d}t$

也收敛．

同理可证，$\int_{-\infty}^{\infty}<D_xK_i,(D_IJD_xH)\int^t g^I>\mathrm{d}t>$是收敛的．

因此，本命题成立．　□

2　弱反馈控制下的一类推广Duffing系统

考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_1-x_1^{2k+1}-I-\varepsilon\delta x_2\\ \dot{I}=\varepsilon(\gamma x_1-\alpha I+\beta\cos\theta)\\ \dot{\theta}=1\end{cases} \quad (2.1)_\varepsilon$$

其中，K为大于等于1的正整数．

显然，当$\varepsilon=0$时，该系统具有双曲正交不变流形M_0．并且当$\varepsilon\neq0$时，$W^u(M_\varepsilon)$的维数与$W^s(M_\varepsilon)$的维数之和为3.

下面我们着重研究$W^u(M_\varepsilon)$与$W^s(M_\varepsilon)$的全局结构

当$\varepsilon=0$时，有$H(x_1,x_2,I)=\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_1^{2k+2}}{2k+2}+Ix_1$

2.1　I=0

同宿轨线Γ可表为

$$x_2=\sqrt{x_1^2-\frac{x_1^{2k+2}}{k+1}} \quad (2.2)$$

因为$\dot{x}_1=x_2$则Γ可由t表示：$\Gamma=(x_1(t),x_2(t))$，根据Γ的对称性，下面仅对$x_1>0$时的那支

作讨论.

此时的 Melnikov 函数可表为

$$M(\theta,\alpha,\beta,\gamma,\delta)=-\delta I_1+\gamma I_2+\beta\sqrt{I_3^2+I_4^2}\sin(t_0+\theta^+)$$

其中,$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}x_2^2\mathrm{d}t$, $I_2=\int_{-\infty}^{\infty}x_1^2\mathrm{d}t$, $I_3=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\cos t\mathrm{d}t$, $I_4=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\sin t\mathrm{d}t$, $\theta^+=\mathrm{tg}^{-1}\frac{I_3}{I_4}$

引理 1 I_1,I_2,I_3,I_4 收敛

证明 ∵ Γ 在 Hamilton 曲面上,不妨设 $x_1N<M$, $|x_2|<N$

∴ $I_2=\int_{-\infty}^{\infty}x_2^2\mathrm{d}t=\int_0^N x_2\mathrm{d}x_1$ 收敛

而 $|I_3|=|\int_{-\infty}^{\infty}x_2\cos t\mathrm{d}t|\leqslant|\int_{-\infty}^{\infty}x_2\mathrm{d}t|=|\int_0^N\mathrm{d}x_1|$

∴ I_3 也收敛,同理 I_4 收敛.

由命题 1.1 可推知 I_1 收敛. □

引理 2 除了离散的 t 的集合,I_3, I_4 不同时为零[2]

定理 1 $\beta>0$

(1) $|I_1\delta-\gamma I_2|<\beta\sqrt{I_3^2+I_4^2}$,系统$(2.1)_\varepsilon$有浑沌存在.

(2) $|I_1\delta-\gamma I_2|=\beta\sqrt{I_3^2+I_4^2}$,系统$(2.1)_\varepsilon$有两次同宿相切现象存在.

(3) $|I_1\delta-I_2\gamma|>\beta\sqrt{I_3^2+I_4^2}$,系统$(2.1)_\varepsilon$没有浑沌现象.

证明 (1) $M=-\delta I_1+\gamma I_2+\beta\sqrt{I_3^2+I_4^2}\sin(t_0+\theta^+)=0$

$\Rightarrow|\sin(t_0+\theta^+)|\neq1$

$\Rightarrow\dfrac{|\delta I_1-\gamma I_2|}{\beta\sqrt{I_3^2+I_4^2}}<1$

又 ∵ $D_{t_0}M=\cos(t_0+\theta^+)\neq0$

系统$(2.1)_\varepsilon$有浑沌现象.

(2) $\sin(t_0+\theta^+)=\pm1\Rightarrow\cos(t_0+\theta^+)=0$

$\Rightarrow D_{t_0}M=0$ 但 $D_{t_0}{}^2M\neq0$

∴ $(2.1)_\varepsilon$有两次同宿相切现象出现.

(3) 显然. □

推论 对于系统$(2.1)_\varepsilon$,至多除去离散的 t 的集合 Λ_k,当 $|\delta I_1-\gamma I_2|>2\sqrt{2}\beta(k+1)^{\frac{1}{2k}}$时没有浑沌出现.

证明 对于(2.2)式,当 $x_2=0$ 时,可得 x_1 的变化范围 $x_1\in[-\sqrt[2k]{k+1},\sqrt[2k]{k+1}]$,再由 $x_2=\dot{x}_1$ 可知 $I_3^2+I_4^2\leqslant2(\int_{-\infty}^{\infty}x_2\mathrm{d}t)^2=8(\int_0^{\sqrt[2k]{k+1}}\mathrm{d}x_1)^2=8(k+1)^{\frac{1}{k}}$ 由定理 1 可知,当 $|\delta I_1-\gamma I_2|>2\sqrt{2}\beta\sqrt[2k]{k+1}$系统$(2.1)_\varepsilon$无浑沌现象.

2.2 $I=\pm\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{1-\frac{\gamma}{\alpha}}$ 即 $x_1(I)=\sqrt{1-\frac{\gamma}{\alpha}}$

这里可以采用2.1中的处理方法讨论，下面把结论以定理形式表示．

定理2 $\beta>0$

(1) $|\delta I_1-\gamma I_2|<\beta\sqrt{I_3^2+I_4^2}$，系统(2.1)$_\varepsilon$ 在 $\frac{2k\alpha}{k+1}<\gamma<\alpha$ 处有浑沌存在；

(2) $|\delta I_1-\gamma I_2|=\beta\sqrt{I_3^2+I_4^2}$，系统(2.1)$_\varepsilon$ 在 $\frac{2k\alpha}{k+1}<\gamma<\alpha$ 处有两次同宿相切；

(3) $|\delta I_1-\gamma I_2|>\beta\sqrt{I_3^2+I_4^2}$，系统(2.1)$_\varepsilon$ 在 $\frac{2k\alpha}{k+1}<\gamma<\alpha$ 处无浑沌出现．

2.3 计算机上演示图形

演示参数假设

$$\alpha=\beta=1, I=0.$$

在考虑稳定流形与不稳定流形相交时，采用四阶Rung-Kutta法求数值解，除不可避免的截断误差外，可以演示出轨线相交情况(见图1，图2)．

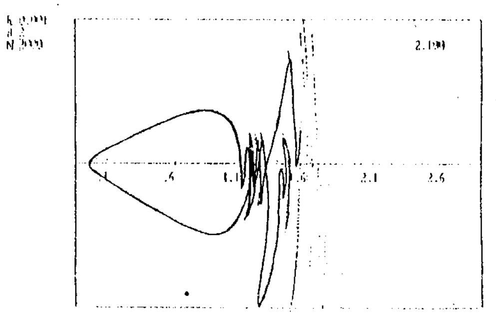

图1 $\varepsilon=0.1$, $d=2$ 时，用四阶Rung-Kutta方法作出的不稳定流形与稳定流形相交的情况

Fig. 1 The transversely intersection of W^s and W^u using 4th Rung-Kutta method, when $\varepsilon=0.1$, $d=2$

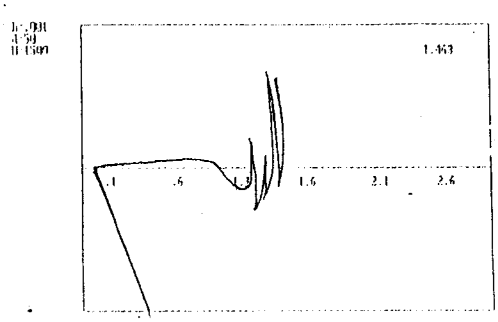

图2 $\varepsilon=0.1$, $d=50$ 时，满足了推论流形的动力行为

Fig. 2 W^u and W^s satisfied corollary 2.1 when $\varepsilon=0.1$, $d=50$

参 考 文 献

[1] Stephen Uiggins, Global Bifurcation on Chaos, 1988

[2] Salam F. M. A., The Melnikov technique to highly dissipative system, *Siam J. Appl. Math.*, 1987, **47** (2):232～243

The Chaos of Extended Duffing Systems with Weak Feedback Control

Zhang Qi
(Shanghai University of Finance & Economics)

Chen Zhong
(Shanghai Jiatong University)

Abstract

Under some assumptions, the convergence of Melnikov methods for the system $q'=f(q)+\varepsilon g(q,\mu,\varepsilon)$ is proved, where $f\equiv(JD_xH,0,\Omega)$, $g\equiv(g^x,g^I,g^\theta)$ and $q\equiv(x,I,\theta)\in R^{2n}\times R^m\times R^l$. Then, a detailed analysis of two special systems is provided, involing the existance and boundedness of the homoclinic manifold and the convergence of Melnikov function. And finally, the parametric space for chaos is presented.

Keywords chaos; Melnikov function; transversely intersection