第26卷第1期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 26, No. 1
1997年3月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Mar. 1997

关于唯一 r- 偶泛圈图(Ⅱ)

孙浩平

提　要　证明了下述定理：设 G 是含有6阶严格桥的交叉图，则 G 不是 $UB[1]$图.

关键词　圈；偶图；r-UB 图；r-$UB[1]$ 图

中图法分类号　O175.5

本文是文献[2]的继续，有关概念和记号均沿用文献[2].

本文通过对一系列引理的证明，最终得到

定理B　设 G 是含有 B_2 且 $B_2\in S$ 的交叉图，则 G 不是 $UB[1]$ 图.

为缩短篇幅，将使用下面的记号：

若 $B_j,\cdots,B_{j+r-1}\in \mathrm{int}C(B')$，而 $B_{j+r}\in \mathrm{ext}C(B')$，且存在 B^* 不与 B' 和 B_{j+r} 交叉，使当 $B'\in \mathrm{int}C(B^*)$ 时，由 B^* 的旁圈 $C(B^*)$ 通过 B' 替代圈 C 上的相应的路得到的圈与 $C(B')$ 等长；或当 $B'\in \mathrm{ext}C(B^*)$ 时，由圈 C 通过 $B_j,\cdots,B_{j+r-1}$ 和 B^* 替代圈 C 上相应的路得到的圈与由圈 C 通过 B' 和 B_{j+r} 替代圈 C 上相应的路得到的圈等长，则记这种情况为“矛盾(*)”.

引理11　设 G 是含 C^*_{k+1} 的 $UB[1]$ 图，且有严格桥 $B_1,\cdots,B_k(k\geqslant 2)$，则 $\mathrm{int}C^*_{k+1}=\Phi$.

证明　若 $\mathrm{int}C^*_{k+1}\neq\Phi$. 则设 B_j 是 $\mathrm{int}C^*_{k+1}$ 中的最小阶桥. 记 $F^*_k=\{B_1,\cdots,B_k,C^*_{k+1}\}$. 显然. $F^*_k\in T_2$，且 $I(F^*_k,v-2^{k+1}-2^j+2)$. 由引理3知，G 有 $B_{k+1,j}$. 显然，$B_1\notin \mathrm{int}C^*_{k+1}$(否则，$j=1$，$G$ 有两个 $2^{k+1}+4$ 圈，即 C^*_{k+1} 与 $C_{k+1,1}$，矛盾).

情形1　$B_j,\cdots,B_k\in \mathrm{int}C^*_{k+1}$.

情形1.1　$B_{k+1,j}\in X$.

若 $\mathrm{int}C_{k+1,j}\neq\Phi$，设 B_t 是 $\mathrm{int}C_{k+1,j}$ 的最小阶桥. 记 $F^*_{k+1}=F^*_k\cup\{B_{k+1,j}\}$. 显然 $F^*_{k+1}\in T_2$ 且 $I(F^*_{k+1},v-2^{k+1}-2^j-2^t+2)$. 由引理3知 G 有 $B_{k+1,jt}$. 易知 G 的另一交叉桥 B^* 的阶 $\geqslant 2^{k+1}+2^j+2^t+2$. 令

$$|C_{k+1,j}\cap C(B^*)|=x,$$
$$|C\cap C_{k+1,j}|=x+y-1,$$
$$|C\cap C(B^*)|=x-z+1,$$

则

$$x+y=2^{k+1}+2^j+3,$$

收稿日期：1993-09-11

作者孙浩平，男，张家港进出口商品检验局，江苏，张家港，215600

$$x + z \geqslant 2^{k+1} + 2^j + 2^t + 3,$$
$$y + z = 2^{k+1} + 4.$$

由此推出 $y \leqslant 2^k - 2^{t-1} + 2$. 因此，$B_k \notin \mathrm{int}C_{k+1,j}$. 于是存在 $B_t, \cdots, B_{t+r-1} \in \mathrm{int}C_{k+1,j}$，而 $B_{t+r} \in \mathrm{ext}C_{k+1,j}$. 若 $B_t \in \mathrm{int}C_{k+1,jt}$，则无论 $B_{k+1,jt}$ 是否是交叉桥，都推出 G 有两个 $2^{k+1} + 2^j + 2$ 圈，矛盾. 若 $B_t \notin \mathrm{int}C_{k+1,jt}$，则 $B_t, \cdots, B_{t+r-1} \notin \mathrm{int}C_{k+1,jt}$，从而 G 有两个 $v - 2^{k+1} - 2^j - 2^{t+r}$ 圈，又矛盾. 因此 $\mathrm{int}C_{k+1,j} = \Phi$. 此时有 $I(F^*_{k+1}, v - 2^{k+2} - 2^j + 2)$，由引理3知，$G$ 有 $B_{k+2,j}$. 显然 $|B^*| \geqslant 2^{k+2} + 2^j + 2$. 故

$$x + z \geqslant 2^{k+2} + 2^j + 3,$$
$$x + y = 2^{k+1} + 2^j + 3, y + z = 2^{k+1} + 4.$$

推出 $y = 2$，从而

$$x + z = 2^{k+2} + 2^j + 3,$$

故 $B^* = B_{k+2,j}$. 记 $F^*_{k+2} = F^*_{k+1} \cup \{B_{k+2,j}\}$. 显然，$F^*_{k+2} \in T_1$ 且有 $I(F^*_{k+2}, v - 2^{k+2} - 2^{j+1} + 2)$. 由引理2知，或 $F = F^*_{k+2} - \{C^*_{k+1}\}$，或 G 有 $B_{k+2,j+1}$.

若 $F = F^*_{k+2} - \{C^*_{k+1}\}$. 由于此时 $B_1, \cdots, B_{j-1} \in \mathrm{ext}C_{k+2,j} \cap \mathrm{ext}C_{k+1,j}$; $B_j, \cdots, B_k \in \mathrm{int}C_{k+2,j} \cap \mathrm{ext}C_{k+1,j}$. 显然，$G$ 的最小内圈必含桥 $B_{k+2,j}$，同时含 $B_{k+2,j}$ 和 B_j 的最小内圈的长

$$l = 2^{k+1} + 4 - \sum_{i=j}^{k} 2^i = 2^j + 4 (j \geqslant 2).$$

当 $j = 2$ 时，若 $k = 2$，则 G 有19个圈，$v = 40$. 容易验证此时 G 无10圈，矛盾；若 $k \geqslant 3$，则 G 无14圈. 否则，这个14圈或是含 $B_2, \cdots, B_k$ 中某些桥的交叉圈，即有

$$2^{k+1} + 4 - \sum_{t} 2^{i_t} = 14,$$

亦即

$$2^{k+1} - \sum_{t} 2^{i_t} = 10,$$

其中 $\{i_t\}$ 是 $\{2, \cdots, k\}$ 的子集. 显然上式左边能被4整除，而右边不能，矛盾；或是含 $B_{k+2,j}$ 而不含 B_j 的圈，此时若还含 B_1，则 G 有两个16圈，若不含 B_1，则 G 有两个12圈，总矛盾. 当 $j \geqslant 3$ 时，$l > 8$. 又含 $B_{k+2,j}$ 而不含 B_j 的内圈长显然不等于8，否则由此圈用 B_1 在圈 C 上相应的路替代 B_1 可得一个10圈. 于是 G 有两个10圈，矛盾. 从而 G 有 $B_{k+2,j+1}$.

显然 $\mathrm{int}C_{k+2,j+1}$ 不含交叉桥(否则，有两个 $2^j + 2$ 圈，矛盾)，所以 $B_k \notin \mathrm{int}C_{k+2,j+1}$. 又若 $\mathrm{int}C_{k+2,j+1} \notin \Phi$，则存在最小的 t 使 $B_t, \cdots, B_{t+r-1} \in \mathrm{int}C_{k+2,j+1}$，而 $B_{t+r} \notin \mathrm{int}C_{k+2,j+1}$. 记 $F^*_{k+3} = F^*_{k+2} \cup \{B_{k+2,j+1}\}$，则有 $I(F^*_{k+3}, v - 2^{k+2} - 2^{j+1} - 2^t + 2)$. 由引理2知，或 $F = F^*_{k+3} - \{C^*_{k+1}\}$ 或 G 有 $B_{k+2,j+1,t}$.

若 $F = F^*_{k+3} - \{C^*_{k+1}\}$. 显然 $v - 2^{k+2} - 2^{j+1} - 2^t$ 圈是 G 的最大阶旁圈，即 $v - 2^{k+2} - 2^{j+1} - 2^t = 2^{k+2} + 2^{j+1} + 2$，从而 $v = 2^{k+3} + 2^{j+2} + 2^t + 2$. 从前面证明 $F \neq F^*_{k+2} - \{C^*_{k+1}\}$ 中知，若 G 有8阶内圈 C'，则 C' 必含桥 $B_{k+2,j+1}$. 设同时含 $B_{k+2,j+1}$ 和 B_t 的最小内圈的长为 l，则

$$l \geqslant 2^{k+2} + 2^{j+1} + 2 - \sum_{r=t}^{j-1} 2^r = 2^{k+2} + 2^j + 2^t + 2 > 8.$$

于是 C' 必同时含 $B_{k+2,j+1}$ 和 $B_{k+2,j}$.

当 $t > 1$ 时，$B_1 \notin \mathrm{int}C_{k+2,j+1}$，此时，若存在 C'，则由 C' 用 B_1 在圈 C 上的相应路替代 B_1 得

到一个10圈,于是 G 有两个10圈,矛盾.

当 $t=1$ 且 $\mathrm{int}C_{k+2,j+1}$ 中至少含两条桥时,由于 G 中除 $B_{k+2,j+1}$ 外所有的桥尽可能地替代圈 C 上相应的路,可得 G 的 $v-2^{k+2}-2^{j+1}+2$ 圈. 于是,同时含 $B_{k+2,j+1}$ 和 $B_{k+2,j}$ 的最小内圈长

$$l' \geqslant v-2^{k+2}-2^{j+1}+2-(2^{k+2}+2^{j+1})+2^t+2^{t+1}=$$
$$2^{k+3}+2^{j+2}+2^t+2-2^{k+3}-2^{j+2}+2+2^t+2^{t+1}=2^{t+2}+4>8(t=1).$$

此时 C' 不存在.

当 $t=1$ 且 $\mathrm{int}C_{k+2,j+1}$ 中恰有一条桥时,若 C' 存在,则由 C' 用桥 $B_3,\cdots,B_{j-1},B_{k+2,j}$ 在圈 C 上的相应的路替代这些桥可得一个长为 $2^{k+2}+2^{j+1}$ 的圈 $(8+\sum_{r=3}^{j-1}2^i+2^{k+2}+2^j=2^{k+2}+2^{j+1})$, 而由 $C_{k+2,j+1}$ 用桥 B_1 替代圈 C 相应的路也得到一个长为 $2^{k+2}+2^{j+1}$ 的圈,矛盾.

总之, G 不含8圈,矛盾. 因此 $F\neq F_{k+3}^*-\{C_{k+1}^*\}$.

(以上通过计算 G 中不含某个圈来证明 $F\neq F_{k+3}^*-\{C_{k+1}^*\}$ 的方法将在下文中反复应用. 为了减少重复,下文一律不作证明.)

故 G 有 $B_{k+2,j+1,t}$,推出矛盾(*). 于是 $\mathrm{int}C_{k+2,j+1}=\Phi$. 即 $B_{k+2,j+1}\in S$.

假设 $B_{k+2,j+1},\cdots,B_{k+i,j+i-1}\in S(i\geqslant 2)$. 完全类似地重复上面过程,容易证明 G 有 $B_{k+i+1,j+i}\in S$. 这样 G 是无限图,矛盾.

情形1.2 $B_{k+1,j}\notin X$.

显然 $X\subset \mathrm{ext}C_{k+1,j}$, 从而 $B_j,\cdots,B_k\in \mathrm{ext}C_{k+1,j}$. 若 $\mathrm{int}C_{k+1,j}\neq\Phi$, 则存在最小 t 使 $B_t,\cdots,B_{t+r-1}\in \mathrm{int}C_{k+1,j}$, 而 $B_{t+r}\in \mathrm{ext}C_{k+1,j}$. 类似情形1.1,可推出 G 有 $B_{k+1,jt}$,导致矛盾(*). 因此 $B_{k+1,j}\in S$.

归纳假设 $B_{k+1,j},\cdots,B_{k+i,j+i-1}\in S(i\geqslant 1)$. 记

$$F_{k+i}^*=\{B_1,\cdots,B_k,C_{k+1}^*,B_{k+1,j},\cdots,B_{k+i,j+i-1}\},$$

显然 $F_{k+i}^*\in T_2$ 且有 $I(F_{k+i}^*,v-2^{k+i+1}-2^{j+i}+2)$. 由引理3知, G 有 $B_{k+i+1,j+i}$. 若 $B_{k+i+1,j+i}\in X$,仿照情形1.1推出矛盾. 因此 $B_{k+i+1,j+i}\notin X$. 仿照情形1.2中证明 $B_{k+1,j}\in S$ 的过程,即得 $B_{k+i+1,j+i}\in S$. 从而 G 是无限图,矛盾.

情形2 存在 $B_j,\cdots,B_{j+r-1}\in \mathrm{int}C_{k+1}^*$, 而 $B_{j+r}\in \mathrm{ext}C_{k+1}^*$.

情形2.1 $B_{k+1,j}\in X$.

若 $\mathrm{int}C_{k+1,j}\neq\Phi$. 设 B_t 是 $\mathrm{int}C_{k+1,j}$ 中的最小阶桥,容易推出 G 有 $B_{k+1,jt}$. 显然 $B_t\notin \mathrm{int}C_{k+1,jt}$. 若 $B_{k+1,jt}\in X$,则 $B_t\in\{B_j,\cdots,B_{j+r-1}\}$. 此时若存在 $B_t,\cdots,B_{t+p-1}\in \mathrm{ext}C_{k+1,jt}$ 且 $B_{t+p}\in \mathrm{ext}C_{k+1,j}(p\leqslant r)$, 则 G 有两个 $v-2^{k+1}-2^j-2^{t+p}$ 圈,矛盾. 于是有 $B_t,\cdots,B_{j+r-1},B_{j+r}\in \mathrm{int}C_{k+1,j}$ 且 $B_{j+r}\in \mathrm{int}C_{k+1,jt}$. 推出 G 有两个 $2^{k+1}+2^j+2^t+2-2^{j+r}$ 圈,又矛盾. 故 $B_{k+1,jt}\notin X$. 若 $\mathrm{int}C_{k+1,jt}\neq\Phi$, 显然 $B_{k+1,j}\notin \mathrm{int}C_{k+1,jt}$. 若存在 $B_p,\cdots,B_{p+l-1}\in \mathrm{int}C_{k+1,jt}(p+l<k+1)$, 而 $B_{p+l}\in \mathrm{ext}C_{k+1,jt}$. 容易推出 G 有 $B_{k+1,jtp}$,导致矛盾(*). 于是存在 $B_p,\cdots,B_k\in \mathrm{int}C_{k+1,jt}$, 容易推出 G 有 $B_{k+1,jtp}$,导致矛盾(*). 因此 $B_{k+1,jt}\in S$. 记 $F'_{k+1}=\{B_1,\cdots,B_k,C_{k+1}^*,B_{k+1,j},B_{k+1,jt}\}$. 显然 $F'_{k+1}\in T_2$ 且有 $I(F'_{k+1},v-2^{k+2}-2^{t+1}-2^{j+1}+2)$. 由引理3知, G 有 $B_{k+2,j+1,t+1}$. 于是 G 的另一交叉桥 B^* 的阶 $\geqslant 2^{k+2}+2^{j+1}+2^{t+1}+2$. 令

$$|C_{k+1,j}\cap C(B^*)|=x,$$

$$|C \cap C_{k+1,j}| = x + y - 1,$$
$$|C \cap C(B^*)| = x + z - 1,$$

则

$$x + y = 2^{k+1} + 2^j + 3,$$
$$x + z \geqslant 2^{k+2} + 2^{j+1} + 2^{t+1} + 3,$$
$$y + z = 2^{k+1} + 4.$$

推出

$$y \leqslant -2^{j-1} - 2^t + 2,$$

矛盾. 因此 $\mathrm{int}C_{k+1,j} = \Phi$.

记 $F^*_{k+1} = \{B_1, \cdots, B_k, C^*_{k+1}, B^*_{k+1,j}\}$. 显然 $F^*_{k+1} \in T_2$ 且有 $I(F^*_{k+1}, v - 2^{k+2} - 2^j + 2)$. 由引理3知, G 有 $B_{k+2,j}$. 类似情形1.1中的证明可得 $B^* = B_{k+2,j}$. 令 $F^*_{k+2} = F^*_{k+1} \cup \{B_{k+1,j}\}$, 则有 $I(F^*_{k+2}, v - 2^{k+2} - 2^{j+1} + 2)$. 由引理2知, 或 $F = F^*_{k+2} - \{C^*_{k+1}\}$, 或 G 有 $B_{k+2,j+1}$. 容易证明 $F \neq F^*_{k+2} - \{C^*_{k+1}\}$. 从而 G 有 $B_{k+2,j+1}$. 显然 $X \subset \mathrm{ext}C_{k+2,j+1}$. 于是若 $\mathrm{int}C_{k+2,j+1} \neq \Phi$. 则存在最小的 t 使 $B_t, \cdots, B_{t+r-1} \in \mathrm{int}C_{k+2,j+1}$, 而 $B_{t+r} \in \mathrm{ext}C_{k+2,j+1}$. 仿照情形1.1可证 G 有 $B_{k+2,j+1,t}$, 导致矛盾（$*$）. 所以 $B_{k+2,j+1} \in S$. 假设 $B_{k+2,j+1}, \cdots, B_{k+i,j+i-1} \in S(i \geqslant 2)$. 仿照上面证法, 可得 G 有 $B_{k+i+1,j+i} \in S$, 矛盾.

情形2.2　$B_{k+1,j} \in X$

显然 $X \subset \mathrm{ext}C_{k+1,j}$, 于是推出 G 有两个 $v - 2^{k+1} - 2^{j+r}$ 圈, 矛盾.

上述矛盾说明 $\mathrm{int}C^*_{k+1} = \Phi$.

引理12　设 G 是 $UB[1]$ 图, $B_1, \cdots, B_k \in S(k \geqslant 2)$. 则 G 有 B_{k+1}.

证明　记 $F_k = \{B_1, \cdots, B_k\}$, 则有 $I(F_k, v - 2^{k+1} + 2)$. 由引理1知, G 或有 C^*_{k+1}, 或有 B_{k+1}. 若 G 有 C^*_{k+1}, 则由引理11知, $\mathrm{int}C^*_{k+1} = \Phi$. 记 $F_k{}^* = F_k \cup \{C^*_{k+1}\}$. 显然 $F_k{}^* \in T_2$, 且有 $I(F_k{}^*, v - 2^{k+2} + 2)$. 由引理3知, G 有 B_{k+2}, 记 $F_{k+2} = F_k{}^* \cup \{B_{k+2}\}$.

若 $B_{k+2} \in X$, 易证 $\mathrm{int}C_{k+2} = \Phi$. 于是有 $I(F_{k+2}, v - 2^{k+2} - 2^{k+1} + 2)$. 由引理3知, G 有 $B_{k+2,k+1}$. 类似引理11情形1.1中的证法可得 $B_{k+2,k+1} \in X$. 记 $F^*_{k+2} = F_{k+2} \cup \{B_{k+2,k+1}\}$. 显然, $F^*_{k+2} \in T_1$ 且有 $I(F^*_{k+2}, v - 2^{k+3} + 2)$. 由引理2知, 或 $F = F^*_{k+2} - \{C^*_{k+1}\}$, 或 G 有 B_{k+3}. 容易证明 $F \neq F^*_{k+2} - \{C^*_{k+1}\}$, 故 G 有 B_{k+3}. 显然 $X \subset \mathrm{ext}C_{k+3}$（否则, G 有两个 $2^{k+2} + 2$ 圈, 矛盾）. 若 $\mathrm{int}C_{k+3} \neq \Phi$, 定义 $f(F_{k+2}) = (x_1, \cdots, x_{k+2})$, 则存在最小的 j, 使 $x_j, \cdots, x_{j+r-1} \in \mathrm{int}C_{k+2}$, 而 $x_{j+r} \in \mathrm{ext}C_{k+3}$. 记 $F_{k+3} = F^*_{k+2} \cup \{B_{k+3}\}$, 则有 $I(F_{k+3}, v - 2^{k+3} - 2^j + 2)$. 由引理2知, 或 $F = F_{k+3} - \{C^*_{k+1}\}$, 或 G 有 $B_{k+3,j}$. 易证 $F \neq F_{k+3} - \{C^*_{k+1}\}$, 故 G 有 $B_{k+3,j}$, 推出矛盾（$*$）. 因此 $B_{k+3} \in S$. 运用数学归纳法, 易证对一切自然数 $i \geqslant 3$, G 有 $B_{k+i} \in S$, 矛盾, 所以 $B_{k+2} \notin X$.

显然, $X \subset \mathrm{ext}C_{k+2}$（因为一条交叉桥的阶数 $\geqslant 2^{k+2} + 2$）, 定义 $f(F_k{}^*) = (x_1, \cdots, x_{k+1})$, 这里 $x_{k+1} \notin \mathrm{int}C_{k+2}$. 若 $\mathrm{int}C_{k+2} \neq \Phi$, 则存在最小的 j, 使 $x_j, \cdots, x_{j+r-1} \in \mathrm{int}C_{k+2}$, 而 $x_{j+r} \in \mathrm{ext}C_{k+2}$, 记 $F_{k+2} = F_k{}^* \cup \{B_{k+2}\}$, 显然 $F_{k+2} \in T_2$, 且有 $I(F_{k+2}, v - 2^{k+2} - 2^j + 2)$. 由引理3知, G 有 $B_{k+2,j}$, 推出矛盾（$*$）. 这样 $B_{k+2} \in S$.

运用数学归纳法可证, 对任意自然数 $i \geqslant 2$, G 有 $B_{k+i} \in S$, 矛盾. 故 G 无 C^*_{k+1}, 因此, G 有 B_{k+1}.

引理13　设 G 是 $UB[1]$ 图. $B_1,\cdots,B_k\in S(k\geqslant 2)$，则 G 有 B_{k+1}，且 $B_{k+1}\notin X$.

证明　引理12已证 G 有 B_{k+1}，记 $F_{k+1}=\{B_1,\cdots,B_{k+1}\}$. 若 $B_{k+1}\in X$，易证 $\mathrm{int}C_{k+1}=\Phi$. 于是 $I(F_{k+1},v-2^{k+2}+2)$. 由引理1知，G 或有 C^*_{k+2}，或有 B_{k+2}. 再分下列情形予以讨论：

情形1　G 有 C^*_{k+2}，记 $F^*_{k+1}=F_{k+1}\cup\{C^*_{k+2}\}$

此时易证 $\mathrm{int}C^*_{k+2}=\Phi$. 显然，$F^*_{k+1}\in T_2$ 且有 $I(F^*_{k+1},v-2^{k+2}-2^{k+1}+2)$. 由引理3知，$G$ 有 $B_{k+2,j+1}$. 易证 $B_{k+2,k+1}\in X$. 又记 $F^*_{k+2}=F^*_{k+1}\cup\{B_{k+2,k+1}\}$. 显然，$F^*_{k+2}\in T_1$ 且有 $I(F^*_{k+2},v-2^{k+3}+2)$. 由引理2知，或 $F=F^*_{k+2}-\{C^*_{k+2}\}$，或 G 有 B_{k+3}. 易证 $F\neq F^*_{k+2}-\{C^*_{k+2}\}$. 从而 G 有 B_{k+3}. 显然 $X\subset\mathrm{ext}C_{k+3}$(否则，$G$ 有两个 $2^{k+1}+2$ 圈，矛盾). 又若 $\mathrm{int}C_{k+3}\neq\Phi$，则存在最小的 t，使 $B_t,\cdots,B_{t+r-1}\in\mathrm{int}C_{k+3}$，而 $B_{t+r}\in\mathrm{ext}C_{k+3}$. 记 $F^*_{k+3}=F^*_{k+2}\cup\{B_{k+3}\}$，则 $F^*_{k+2}\in T_1$ 且有 $I(F^*_{k+3},v-2^{k+3}-2^t+2)$. 由引理2知，或 $F=F^*_{k+3}-\{C^*_{k+2}\}$，或 G 有 $B_{k+3,t}$. 易证 G 有 $B_{k+3,t}$，推出矛盾(＊). 因此，$B_{k+2}\in S$. 用数学归纳法可证，对任意自然数 $i\geqslant 2$，G 有 $B_{k+i}\in S$，矛盾.

情形2　G 有 B_{k+2}，记 $F_{k+2}=F_{k+1}\cup\{B_{k+2}\}$.

情形2.1　$B_{k+2}\in X$.

此时易证 $\mathrm{int}C_{k+2}=\Phi$. 于是有 $I(F_{k+2},v-2^{k+2}-2^{k+1}+2)$，且其中无交叉圈. 由 B_{k+1}，$B_{k+2}\in X$ 易推出 G 中最大交叉圈的长 $\geqslant v-2^{k+2}-2^{k+1}+2$. 从而 G 有两个等长圈，矛盾.

情形2.2　$B_{k+2}\notin X$.

显然 $X\subset\mathrm{ext}C_{k+2}$(否则，$G$ 有两个 $2^{k+1}+2$ 圈，矛盾). 若 $\mathrm{int}C_{k+2}\neq\Phi$，则存在最小的 j，使 $B_j,\cdots,B_{j+r-1}\in\mathrm{int}C_{k+2}$，而 $B_{j+r}\in\mathrm{ext}C_{k+2}$. 从而有 $I(F_{k+2},v-2^{k+2}-2^j+2)$. 由引理1知，$G$ 或有 $C^*_{k+2,j}$，或有 $B_{k+2,j}$. 若 G 有 $C^*_{k+2,j}$，则 G 有两个 $v-2^{k+2}-2^{j+r}$ 圈，矛盾. 故 G 有 $B_{k+2,j}$，推出矛盾(＊)，因此 $B_{k+2}\in S$. 进一步可证，对任意自然数 i，G 有 $B_{k+1+i}\in S$，矛盾. 说明 $B_{k+1}\notin X$.

引理14　设 G 是 $UB[1]$ 图，$B_1,\cdots,B_k\in S(k\geqslant 2)$. 则 G 有 B_{k+1}，且 $B_{k+1}\in S$.

证明　由引理13知，G 有 B_{k+1}，且 $B_{k+1}\notin X$. 只需证明 $\mathrm{int}C_{k+1}=\Phi$. 否则，由于 $B_k\notin\mathrm{int}C_{k+1}$，所以存在最小的 j，使 $B_j,\cdots,B_{j+r-1}\in\mathrm{int}C_{k+1}$，且 $B_{j+r}\in\mathrm{ext}C_{k+1}$，记 $F_{k+1}=\{B_1,\cdots,B_{k+1}\}$. 则有 $I(F_{k+1},v-2^{k+1}-2^j+2)$. 由引理1推出 G 或有 $C^*_{k+1,j}$，或有 $B_{k+1,j}$，若 G 有 $B_{k+1,j}$，推出矛盾(＊). 因此，G 有 $C^*_{k+1,j}$. 显然，$B_{k+1}\in\mathrm{int}C^*_{k+1,j}$(否则，$G$ 有两个 $v-2^{k+1}-2^{j+r}$ 圈，矛盾). 设 B_l 是 $\mathrm{int}C^*_{k+1,j}$ 中的最小阶桥，显然 $l\leqslant j$. 记 $F^*_{k+1}=F_{k+1}\cup\{C^*_{k+1,j}\}$. 则 $F^*_{k+1}\in T_2$，且有 $I(F^*_{k+1},v-2^{k+1}-2^j-2^l+2)$. 由引理3知，$G$ 有 $B_{k+1,jl}$. 现分情形予以讨论：

情形1　$l<j$. 此时 $B_{k+1,jl}\in X$(否则，G 或有两个 2^l+2 圈，或 G 有两个 $v-2^{k+1}-2^l-2^{j+r}$ 圈，矛盾).

情形1.1　$B_j\in\mathrm{ext}C_{k+1,jl}$. 此时 G 有两个 $v-2^{k+1}-2^l-2^{j+r}$ 圈，矛盾.

情形1.2　$B_j\in\mathrm{int}C_{k+1,jl}$. 若 $B_l\in\mathrm{int}C_{k+1,jl}$，则 G 有两个 $2^{k+1}+2$ 圈，矛盾. 于是 $B_l\in\mathrm{ext}C_{k+1,jl}$. 设 B_t 是 $\mathrm{int}C_{k+1,jl}$ 中最小阶桥，则 $t\leqslant j(t\neq l)$. 记 $F^*_{k+2}=F^*_{k+1}\cup\{B_{k+1,jl}\}$，显然，$F^*_{k+2}\in T_2$，且有 $I(F^*_{k+2},v-2^{k+1}-2^j-2^l-2^t+2)$. 由引理3知，$G$ 有 $B_{k+1,jlt}$. 若 $t=j$，则 $B_{k+1,jlt}=B_{k+1,jlj}$. 容易推出 G 或有两个 $2^{k+1}+2^j+2^l+2$ 圈，或有两个 $v-2^{k+1}-2^l-2^{j+r}$ 圈，矛盾. 因此 $t<j$. 此时，若 $B_{k+1,jlt}\in X$. 易知 $B_t\notin\mathrm{int}C_{k+1,jlt}$(否则，$G$ 有两个 $2^{k+1}+2^j+2^l+2$ 圈，矛盾)，$B_j\notin\mathrm{int}C_{k+1,jlt}$(因为 $B_j\in\mathrm{int}C_{k+1,jl}\cap\mathrm{int}C^*_{k+1,j}$). 此时存在 $B_t,\cdots,B_{t+s-1}\in$

$\mathrm{int}C_{k+1,jl}\cap \mathrm{ext}C_{k+1,jlt}\cap \mathrm{ext}C_{k+1}$. 而 $B_{t+s}\notin \mathrm{int}C_{k+1,jl}\cap \mathrm{ext}C_{k+1,jlt}\cap \mathrm{ext}C_{k+1}$，当 $t+s\neq j$ 时，G 有两个 $v-2^{k+1}-2^{l}-2^{j+r}-2^{t+s}$ 圈，矛盾. 则 $t+s=j$，此时 G 有两个 $v-2^{k+1}-2^{l}-2^{j+r}$ 圈，又矛盾. 因此，$B_{k+1,jlt}\notin X$. 考虑 B_t 与 $\mathrm{int}C_{k+1,jlt}$ 的位置关系，推出 G 或有两个 $2^{k+1}+2^{j}+2^{l}+2$ 圈，或有两个 $v-2^{k+1}-2^{j+r}-2^{l}-2^{t}$ 圈，总矛盾.

情形 2　$l=j$. 此时 $B_{k+1,jl}=B_{k+1,jj}$. 考虑 B_j 与 $\mathrm{int}C_{k+1,j+1}$ 的位置关系. 若 $B_j\in \mathrm{int}C_{k+1,j+1}$，则 $B_{k+1}\in \mathrm{int}C_{k+1,j+1}$，从而 G 有两个 $2^{j+1}+2$ 圈；若 $B_j\in \mathrm{ext}C_{k+1,j+1}$，由于 $B_{k+1}\notin X$ ，则 $B_{k+1}\in \mathrm{ext}C_{k+1,j+1}$，从而 G 有两个 $v-2^{k+1}-2^{j+r}$ 圈，总矛盾.

上述矛盾说明 $\mathrm{int}C_{k+1}=\Phi$，从而 $B_{k+1}\in S$. □

定理 B 的证明

若 G 是 $UB[1]$ 图，则从引理5知，G 有 B_1 且 $B_1\in S$. 又 G 有 B_2 且 $B_2\in S$. 假设 G 有 B_1，…，$B_k(k\geqslant 2)$，则从引理14知 G 有 $B_{k+1}\in S$. 这样 G 是无限图，矛盾. □

衷心感谢导师施永兵教授的悉心指导.

参 考 文 献

1　施永兵. 关于唯一泛圈图的进一步结果(一)(二). 上海师范大学学报(自然科学版)，1986(2)：20～27；1986(4)：1～7

2　孙浩平. 关于唯一 r- 偶泛圈图(Ⅰ). 上海师范大学学报(自然科学版)，1996(2)：19～27

On Uniquely r- Bipancyclic [1] Graphs (Ⅱ)

Sun Haoping

(Zhangjiagang Import & Export Commodity Inspection Bureau)

Abstract　This is a continuation of my paper "On Uniquely r- Bipancyclic Graphs". We prove that if G is a cross graph and contains 6- strict bridges, then G is not a $UB[1]$ graph.

Key words　cycle; bipartite graph; r-UB- graph; -r-$UB[1]$- graph