偶色数的进一步探讨

许 绍 吉

[1] 中首先定义了偶色数，偶图 B 的偶色数 $\beta(B)=max\{r'+s'|Kr',s'$ 是完全偶图，Kr',s' 可由 B 经同态得到$\}$，设 Kr,s 是 B 经同态得到，且满足 $\beta(B)=r+s,s\geqslant r$ 的完全偶图。

令 B 为具有色族 C 和 D，使 $V(B)=CUD$ 的连通偶图，其中 $|C|\geqslant|D|$，记 $\mu=\mu(B)=|C|$，$p=|V(B)|$，$q=|E(B)|$。

[1] 中给出了引理 $rs\leqslant q$，$r+s\geqslant\mu+1$，然后给出定理：对于树 T，$\beta(T)=\mu+1$，对于偶圈 C_{2n}

$$\beta(C_{2n})=\begin{cases}2+n & \text{当 } n \text{ 为偶数}\\ 1+n & \text{当 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

本文对偶图的偶色数作进一步探讨，给出了广义 θ 偶图和仙人掌偶图的偶色数，偶色数的一个上界，并讨论了树，偶圈，广义 θ 偶图的 r,s 唯一决定问题。

一、广义θ偶图的偶色数

有三条路连接点 u,v 所构成的图称为广义 θ 图，既是广义 θ 图又是偶图的图称为广义 θ 偶图。令 B 为广义 θ 偶图，则 $B-u-v$ 的三条路上顶点数或者都是偶数，或者都是奇数，按其对模 4 的同余类可分为以下八类：

2 2 2	0 0 2	1 1 1	1 1 3
0 0 0	0 2 2	3 3 3	1 3 3

定理 1 广义 θ 偶图 B，当 B-u-v 的三条路上顶点数模 4 余数为 0 0 2，0 2 2，1 1 1 或 3 3 3 时 $\beta(B)=\mu+2$，否则 $\beta(B)=\mu+1$。

证明：先证 $\beta(B)\leqslant\mu+2$，当 $r=1,2$ 时结论显然，设 $r\geqslant3$，

对于广义 θ 偶图 B，有 $q=p+1$，于是 $rs\leqslant p+1$，且 $r+s\geqslant\mu+1\geqslant\frac{p}{2}+1$。从而

$$\frac{p+1}{r}+r\geqslant\frac{p}{2}+1,\ \frac{p(2-r)}{2r}\geqslant1-\frac{1}{r}-r.$$

因 $r\geqslant3$，故 $s\leqslant\frac{p}{r}+\frac{1}{r}\leqslant2+\frac{2}{r(r-2)}+\frac{2}{r-2}+\frac{1}{r}=2+\frac{3}{r-2}$，故若 $r\geqslant4$，则 $s\leqslant 3\frac{1}{2}$，矛盾。

本文于 1981 年 11 月 5 日收到，82 年 9 月 3 日收到修改稿。

设 $r=3$，则 $s\leqslant 5$，分三种情况：

a） $r=3$，$s=5$，则可得 $p=14$，$\mu=7$，此时 $r+s=\mu+1$。

b） $r=3$，$s=4$，则可得 $p=11$ 或 12，$\mu=6$，此时 $r+s=\mu+1$.

c） $r=3$，$s=3$，$p=9$、10，$\mu=5$，此时 $r+s=\mu+1$，或 $p=8$，$\mu=4,5$，此时 B 不能同态为 $K_{3,3}$，故 $\beta(B)\leqslant\mu+2$，且仅当 B 可同态为 $K_{2,\mu}$ 时等式成立。

下面给出定理指出的四种情况能同态为 $K_{2,\mu}$。

显然至少有一个三度点属于 D，设 $v\in D$，将 v 标号 0，然后除 u 外，分三条路依次以序号 1，2，3，0 标之，显见标号为 1 或 3 的点必含在 C 中，当三条路上顶点数为 0 0 2 或 0 2 2（$mod4$）时，$u\in C$，它的邻点有标号 0 和 2，此时 C 中任意点均与标号 0、2 二类点相邻。当三条路上顶点数为 1 1 1 或 3 3 3（$mod4$）时，$u\in D$，此时 u 只能有一个标号 0 或 2 C 中任意点亦必与 D 中标号为 0、2 的二类点相邻，故上述四种情况的 B 能同态为 $K_{2,\mu}$。

由于路上的点均为二度点，故若 B 能同态为 $K_{2,\mu}$，只能将 D 如此分类，当三条路上顶点数为 0 0 0，2 2 2，1 1 3 或 1 3 3（$mod4$）时，前二种情况 $u\in C$，只能与 D 中一类点相邻，后二种情况 $u\in D$，若归入标号为 0 的一类，则与 u 相邻的标号为 1 的点仅与 D 中一类点相邻，将 u 归入标号为 2 的点亦不可能，故此时 B 不能同态为 $K_{2,\mu}$。□。

更一般地，称由 k 条路连接点 u,v 得到的图为 k 重广义 θ 图，当 $k=2$ 时为圈，当 $k=3$ 时为广义 θ 图，用类似方法可得结论：B 为 k 重广义 θ 偶图，当 $B-u-v$ 的 k 条路上顶点数为偶数，但模 4 余数不全为 0，亦不全为 2，或 k 条路上顶点数为奇数，但模 4 余数全为 1 或全为 3 时，B 可同态为 $K_{2,\mu}$，否则不能。

当 $k=2$ 时，B 为圈 C_{2n}，与［1］中结论相同。当 B 为奇偶圈（n 为奇数）时，任取 D 中二点为 u,v，则属 13 型，C、D 各取一点为 u、v，则属 0 0 型或 2 2 型，故 B 不能同态为 $K_{2,\mu}$。当 B 为偶偶圈（n 为偶数）时，可使它属 11 型，33 型或 02 型，B 总不能同态为 $K_{2,\mu}$。

二、仙人掌偶图的偶色数

定义任意二个圈没有公共边的连通图为仙人掌。

定理 2 B 为仙人掌偶图，则当 C 中含有一度点，或 B 含一个奇偶圈，且此圈属于 C 的部分均为二度点时，$\beta(B)=\mu+1$，否则 $\beta(B)=\mu+2$。

证明：先证 $\beta\leqslant\mu+2$，若 $r=1$ 或 2，结论显然，设 $r\geqslant 3$。

对于仙人掌，有 $q=p+k-1$，这里 k 是 B 中圈的个数，因 B 是偶图，最小圈长 $\geqslant 4$，故 $k<\dfrac{p}{3}$，故 $rs\leqslant p+k-1<\dfrac{4}{3}p-1$，于是 $\left(\dfrac{4}{3}p-1\right)/r+r\geqslant r+s\geqslant\mu+1\geqslant\dfrac{p}{2}+1$，

$$\frac{(8-3r)p}{6r}\geqslant 1-r+\frac{1}{r}。$$

因 $r\geqslant 3$，故 $s\leqslant\left(\dfrac{4}{3}p-1\right)/r\leqslant\dfrac{8}{3}+\dfrac{40}{3(3r-8)}-\dfrac{8}{r(3r-8)}-\dfrac{1}{r}$

若 $r\geqslant 5$，则 $s\leqslant 4$ 矛盾，若 $r=4$，则 $s\leqslant 5$，若 $r=3$，则 $s\leqslant 12$，

由 $s+r\leqslant p\leqslant 2\mu\leqslant 2(r+s-1)$，$rs\leqslant p-1+\left[\dfrac{p-1}{3}\right]$ 进一步限制 p 的范围，仅有如下的

(p,q) 图才有可能同态为 $K_{3,s}$ 或 $K_{4,s}$。

$r=3$，$s=$ 3 (8,9),(9,9),(9,10),(10,9),(10,10),(10,11),(10,12)

4 (10,12),(11,12),(11,13),(12,12),(12,13),(12,14)

5 (13,15),(13,16),(14,15),(14,16),(14,17)

6 (15,18),(16,18),(16,19),(16,20)

7 (17,21),(18,21),(18,22)

8 (19,24),(20,24)

9 (22,27),(22,28)

10(24,30)

11(26,33)

12(28,36)

$r=4,s=4$,(13,16),(14,16),(14,17)

5 (16,20)

当 $r=s=3, p=9,10$ 时，$\mu\geqslant 5$，$\beta(B)=\mu+1\geqslant 6=r+s$；对 $r=3$，$s=4$，$p=11$，12和 $r=3$，$5\leqslant s\leqslant 12$ 及 $r=4$ 的情况相类似有 $\beta(B)=\mu+1$。对 $r=s=3$ 的 (8,9) 图只有四个（见图1）。

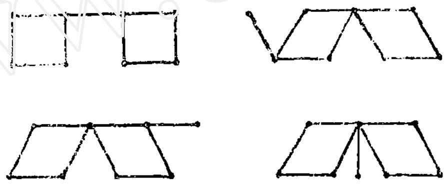

图 1

均不能同态为 $K_{3,3}$。$r=3,s=4$ 的 (10,12) 图只有三个（见图2）。

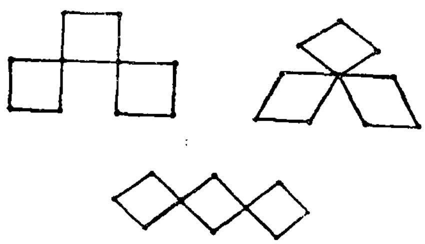

图 2

均不能同态为 $K_{3,4}$。故对于仙人掌偶图，总有 $\beta\leqslant\mu+2$，当且仅当 B 可同态为 $K_{2,\mu}$ 时等号成立。

若 C 中含有一度点，B 不能同态为 $K_{2,\mu}$，故 $\beta=\mu+1$。

若 B 含奇偶圈 C_{4n+2}，且此圈属于 C 的部分均为二度点，则不能将圈上属于 D 的 $2n+1$ 个顶点分成二部分，使每个部分均与属于 C 的 $2n+1$ 个顶点相邻，故此时 $\beta=\mu+1$。于是定理剩下来的部分只需在假设 C 中无一度点的条件下证明以下两个结论：(取消条件 $|C|\geqslant|D|$)

1) 若 B 中仅有一个奇偶圈属于 C 的部分均为二度点，则固定此圈上任意一点 $v\in C$，能将 D 分成二部分，使 C 中除 v 外任一点均与此二部分相邻。

2） 若B不含如此的奇偶圈，其属于C部分均为二度点，则能将D分成二部分，使C中任一点均与此二部分相邻。

对圈数l进行归纳。

当$l=1$时，若是偶偶圈，则可将此圈上点依次标以0,1,2,3，使圈上属于C部分标号为1或3，对圈上的枝，由它与圈的交点（已标定）开始，按0,1,2,3顺序依次接着标定，则C中任意点均与D中标号为0,2的二类点相邻。

若是奇偶圈，且有圈上点$v\in C$，$d(v)>2$，则对此圈上点依次标以0,1,2,3，使v在圈上的二个邻点标号均为0，将v伸出的枝依次标以2,3,1,0，其余枝上点标定同上，于是C中任意点均与D中标号为0,2的二类点相邻。

若是奇偶圈，且属于C的部分均为二度点，取定圈上一点$v\in C$，对圈上点依次标以0,1,2,3，使v的两个邻点标号均为0，再如上述标定枝上点，于是除v外，C中任意一点均与D中标号为0,2的二类点相邻。

于是当$l=1$时1）2）成立，设当$l\leqslant k$时亦成立，往证$l=k+1$时成立。

若B含有一个奇偶圈a，其属于C部分均为二度点，则能将B分解为若干个子仙人掌之并，使满足以下条件：不破坏圈，其C中部分均不含一度点，含a的子仙人掌仅含一个圈，除含a的子仙人掌外，均符合2）的条件。对于不含a的子仙人掌，由2）的归纳假设，能将其D中顶点分成二部分，使其C中任一点均与此二部分相邻，对于含a的子仙人掌，由1）中当$l=1$时的证明可知，固定圈上任一点$v\in C$，可将其D中顶点分成二部分，使其C中除v外任一点均与此二部分相邻，将这些二部分分别归并，若二个子仙人掌的交点属于D，则将该点在二个子仙人掌中所属的部分并为一部分，另外的并为一部分，否则，任意归并即可，于是除v外，C中任一点均与这二部分相邻，故当$l=k+1$时结论1)成立。

若最外一个圈a与另外一个圈b交于v，$v\in C$，则v为割点，分B为E、F两个子仙人掌，其中E含圈a，F含圈b，若在E、F中，a、b都是C中点均为二度点的奇偶圈，则依1）的归纳假设，可在E、F中分别将其D中部分分为二部分，使除v外的C中顶点均分别与其D中二部分相邻，然后分别归并这二部分，使v在E中相邻的部分与在F中相邻的部分属于不同部分，得D的二部分划分，于是C中任意顶点均与此二部分相邻，结论2）成立。

若a、b至少有一个不是在C中点均为二度点的奇偶圈，则可将B如此分解，使含a的子仙人掌与其余部分的交点属于D，显见此时结论2）更为成立，于是当$l=k+1$时，结论2）亦成立□。

[1]中关于树（C中至少有一个一度点）及圈的结论可作为这一结论的特例。

三、一 个 上 界

[1]中曾猜测，对于连通偶图B，有$\beta(B)=\mu+\delta(B)-x$，此处x为某一小于$\delta(B)$的非负整数，即，应有不等式$\beta(B)\leqslant\mu+\delta(B)$，事实上，此不等式不能成立，例如取完全偶图$K_{n,m}$，$(n\leqslant m)$另有$v$与某一顶点相邻得偶图$B$，则$\delta(B)=1$，$\mu(B)=m$或$m+1$，$\beta(B)=m+n=\mu+n$或$\mu+n-1$。

以$\Delta(C)$表示偶图B在C中顶点的最大度，则可给出β的一个上界。（以下以Δ表$\Delta(C)$）

定理3　$\beta(B)\leqslant\mu+\Delta(C)$

证明：假设图B使不等式不成立，则需将D同态为$\Delta+k$个点，其中$(n-1)\Delta<k\leqslant n\Delta$，$n$为某一正整数，此时至少需将$C$中每$n+1$个点同态为一点，设$C'$为$C$同态所得，则

$$\frac{1}{n+1}\mu\geqslant|C'|>\Delta.$$

$$\beta(B)=\Delta+k+|C'|\leqslant\Delta+n\Delta+\frac{1}{n+1}\mu<\Delta+\frac{n}{n+1}\mu+\frac{1}{n+1}\mu=\Delta+\mu。矛盾。\square。$$

对于C正则（C中点度相同）偶图，利用这一上界进行估计较好。

例如，对于k重广义θ偶图，包括偶圈及广义θ偶图，若它的二个k度点均在D中，则$\beta(B)\leqslant\mu+2$。

对于n方体Q_n，C、D各有2^{n-1}个顶点，$\Delta(C)=\Delta(B)=n$，可知$\beta(Q_n)\leqslant 2^{n-1}+n$。

四、r、s 唯一决定问题

［1］中提出如下问题：对于何种图，r、s唯一决定？

［1］中还给出七个十点树可同态为$K_{3,3}$，对于不是这七个树的树T，当T不能同态为$K_{2,\mu-1}$时，r、s唯一决定，否则不唯一，于是，得到以下

定理 4 对于树T，设$|D|\geqslant2$，则r、s不唯一决定当且仅当T满足下列条件之一：

1） $|C|=|D|+1$，且D中点均为二度点。

2） C中只有一个悬挂点。

3） C中只有二个距离为$0(mod\,4)$的悬挂点。

4） T为下列三个树之一。（见图３）

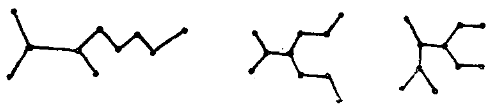

图 3

证明：设C同态为C'，D同态为D'，若T同态为$K_{2,\mu-1}$，则或者$|C'|=2$，或者$|D'|=2$。

a） 若$|C|>|D|$，$|C'|=2$，$|D'|=\mu-1$，则$|D|=|D'|=\mu-1=|C|-1$，若D中有一度点，则不能得到这样的同态，若D中有点v，$d(v)>2$，则$q>2|D|$，$p=q+1>2|D|+1$，于是$|C|>|D|+1$，矛盾，若D中点均为二度点，则任取$v\in C$，以与v距离为$0,2(mod\,4)$将C分为二部分，即得T同态为$K_{2,\mu-1}$。

b） 以下设$|C|\geqslant|D|$，$|C'|=\mu-1$，$|D'|=2$。

显然C中至少有一个悬挂点，若C中只有一个悬挂点u，其余C中点的度$\geqslant2$，则$q\geqslant2|C|-1$，但$q=|C|+|D|-1\leqslant2|C|-1$，故$q=2|C|-1$，即$C$中除$u$外均为二度点，将$D$中与$u$距离为1、3（$mod\,4$）的点分别归类，再将$u$与$C$中任一点同态，即得$T$同态为$K_{2,\mu-1}$。

若C中恰有二个一度点u、v，将D中与u距离为1，3的分别归类，易知，若T能同态为$K_{2,\mu-1}$，则只能如此归类，当u、v距离为$2(mod\,4)$时，v、v的邻点恰在同一类，但同态为$K_{2,\mu-1}$，必须u、v同态为一类，矛盾。若u、v距离为$0(mod\,4)$，则得T同态为$K_{2,\mu-1}$。

若C中悬挂点个数$\geqslant3$，则显然不能同态为$K_{2,\mu-1}$。

c） 4）中的三个树不满足条件1），2），3），但可同态为$K_{3,3}$，亦不唯一，见［1］，$\square$。

定理 5 设B为偶圈或广义θ偶图，则r、s唯一决定当且仅当$\beta(B)=\mu+2$。

证明：设$\beta(B)=\mu+2$，若B为偶偶圈，由于不能有$r\geqslant3$的同态，r、s唯一，若B为广义θ偶图，由定理1的证明可知，$r'\geqslant3$时，$r'+s'=\mu+1$，故r、s唯一。

若B为奇偶圈，由定理2的证明可知B可同态为$K_{2,\mu-1}$，r、s不唯一。

若B为广义θ偶图，且$\beta(B)=\mu+1$，$d(u)=d(v)=3$，$v\in D$，则从v开始，沿三条路依次以0,1,2,3将二度点标号，将标号为0,2的点分别归类，若$B-u-v$的三条路顶点数为222（或000）(mod 4)时，将u与某一标号为1（或为3）的点同态，若$B-u-v$的三条路顶点数为113(133)(mod 4)时，u归入标号为2（为0）的一类，u有一个邻点，仅与标号为2(为0)的点相邻，将它与C中任一点同态，即得T同态为$K_{2,\mu-1}$，□。

参　考　文　献

［1］ Frank Harary, Derbian Hsu and zevi Miller, The bichromaticity of a tree. Theory and Applications of Graphs (ed by Y. Alavi and D. R. Lick) Springer-Verlay 1978,236-246.

A Further Discussion on Bichromaticity

Xu Shaoji

Abstract

In this paper the bichromaticity of bipartite graphs is further discussed and the bichromaticity of generalized θ-bigraphs and crctus bigraphs is given. we also obtain an upper bound of bichromaticity of bigrapos, and discuss the problem of r.s unique determination of trees, even cycles, and generralized θ-bigraphs.