第30卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol.30,No.2
2001年6月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Jun. 2001

围长不小于 r 的2圈分布图的最大边数

唐 华

(上海师范大学 数学科学学院,上海 200234)

摘 要:阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1,c_2,\cdots c_n)$,其中 c_i 是 G 中长为 i 的圈的数目,图 G 的圈长分布满足 $c_1=c_2=\cdots=c_{r-1}=0$ 且对 $i=r,r+1,\cdots,n$ 有 $c_i\leqslant 2$, $\sum_{i=r}^{n}c_i>0$,则称图 G 是围长不小于 r 的2圈分布图,用 $f_r(n,2)$ 表示阶为 n 的围长不小于 r 的2圈分布图的最大可能的边数.证明了对每个整数 $n\geqslant r+2$,有

$$f_r(n,2)\geqslant n+2k-2r+2+\sqrt{4n-24k^2+8k+4r^2-12r+5},$$

其中 $k=[(5+\sqrt{60n+60(r^2-3r)+85})/30]$,这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

关键词:图;圈分布图;圈长分布

中图分类号:O175.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-5137(2001)02-0041-02

阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1,c_2,\cdots c_n)$,其中 c_i 是 G 中长为 i 的圈的数目.若对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,$c_i\leqslant 1$,则称图 G 为圈分布图.确定阶为 n 的圈分布的最大边数 $f(n)$ 是 ERDOS 于1975年提出的一个至今未解决的问题[1].文[2]给出了一个 $f(n)$ 的很好的下界;文[3]又进一步改进了 $f(n)$ 的下界;文[4]给出了围长不小于 r 的圈分布图的最大边数.本文将讨论围长不小于 r 的2圈分布图的最大边数.若图 G 的圈长分布 $(c_1,c_2,\cdots c_n)$ 满足 $c_1=c_2=\cdots=c_{r-1}=0$,且对 $i=r,r+1,\cdots,n$ 有 $c_i\leqslant 2$,$\sum_{i=r}^{n}c_i>0$,则称图 G 是围长不小于 r 的2圈分布图.用 $f_r(n,2)$ 表示阶为 n 的围长不小于 r 的2圈分布图的最大可能的边数.本文将用构造方法给出一类围长不小于 r 的2圈分布图,然后计算这类图的顶点数和边数,给出了 $f_r(n,2)$ 的一个下界.本文主要结果是下述定理.

定理 对每个整数 $n\geqslant r+2$,有

$$f_r(n,2)\geqslant n+2k-2r+2+\sqrt{4n-24k^2+8k+4r^2-12r+5},$$

其中 $k=[(5+\sqrt{60n+60(r^2-3r)+85})/30]$,这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明 用构造方法证明本定理.对于 $n\geqslant r+2$,令 $k=[(5+\sqrt{60n+60(r^2-3r)+85})/30]$,$t=[(1-4k+\sqrt{4n-24k^2+8k+4r^2-12r+5})/2]$.构作图 G_{i+1},$i=1,2,\cdots,k$.

首先取一个长为 $t+2k+4i$ 的圈 C,设 x,y,z 为 C 上的3个顶点,它们分圈 C 为3条路 $Q_1=(y,x)$,$Q_2=(x,z)$,$Q_3=(z,y)$,用一条新路 P_1 连接 x 与 y 和一条新路 P_2 连接 x 与 z,使

(i) P_1 和 P_2 内不交;

(ii) $Q_1\cup P_1$ 是一个长为 $t+2i-1$ 的圈和 $Q_2\cup P_2$ 是一个长为 $t+2i$ 的圈;

收稿日期:1999-05-03

作者简介:唐 华(1973-),女,上海师范大学数学科学学院硕士研究生.

(iii) $|V(P_1)|=[(t+2i)/2]$, $|V(P_2)|=[(t+2i+1)/2]$.

容易看出,当 $t+2i$ 为奇数时, $|V(P_1)|=(t+2i-1)/2$, $|V(P_2)|=(t+2i+1)/2$, $|v(Q_1)|=(t+2i+3)/2$, $|V(Q_2)|=(t+2i+3)/2$, $|V(Q_3-y-z)|=2k+2i-2$. 当 $t+2i$ 为偶数时, $|V(P_1)|=(t+2i)/2$, $|V(P_2)|=(t+2i)/2$, $|V(Q_1)|=(t+2i+2)/2$, $|V(Q_2)|=(t+2i+4)/2$, $|V(Q_3-y-z)|=2k+2i-2$. 显然 G_{t+i}恰有6个圈,它们的长分别为:$t+2i-1$, $t+2i$, $t+2k+4i-3$, $t+2k+4i-2$, $t+2k+4i-1$, $t+2k+4i$.

再构作 $t-r+1$ 个圈 $G_i=c_i$, $i=r, r+1, \cdots, t$, (当 $t<r$ 时,这些圈不构作),且对 $i=1,2,\cdots,t+k-1$将 G_i 的一个顶点和 G_{i+1}的一个顶点重合,得图 G'. 由于每个 G_{t+i}恰有6个圈,因此 $\bigcup_{i=1}^{k} G_{t+i}$恰有 $6k$ 个圈,这些圈的长分别是 $t+1, t+2, \cdots, t+6k$. 又 $\bigcup_{i=r}^{t} G_i$ 恰有 $t-r+1$个圈,它们的长分别是 $r, r+1, \cdots, t$. 因此图 G'是围长不小于 r 的简单圈分布图. 再将 G'和 G'的一个顶点重合,得图 G_1. 再令

$$m=n-2\{r+\sum_{i=r}^{t-1} i+\sum_{i=1}^{k}(t+2k+4i)+\sum_{i=1}^{k}(t-4+2i)-k\}+1,$$

且构作图 $K_{1,m}$. 最后由 G_1和 $K_{1,m}$重合一个顶点得图 G,易知 G 是简单2圈分布图. 容易计算出 G 的顶点数为 n,边数为 $n+6k-2r+1+2t$.

于是 $f_r(n,2)\geqslant n+6k-2r+1+2t=n+2k-2r+2+\sqrt{4n-24k^2+8k+4r^2+12r+5}$. □

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[J]. Macmillan Press, 1976.

[2] SHI Yong-bing. On Maximum Cycle-Distributed Graphs[M]. Discrete Math, 1988, 71: 57-71.

[3] SHI Yong-bing. The Number of Edges in a Maximum Cycle-Distributed Graph[M]. Discrete Math, 1992, 104: 205-209.

[4] WU Chen-xun, SHI Yong-bing. The Maximum Number of Edges in a Cycle-Distributed Graph of Girth No Less than r. J of Shanghai Teacher's Univ. (Natural Sciences), 1993, 22(1): 20-22.

The Maximum Number of Edges in a 2-Cycle-Distributed Graph of Girth No Less than r

TANG Hua

(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: The cycle length distribution of a graph of order n is $(c_1, c_2, \cdots c_n)$, where c_i is the number of cycles of length i. A graph G is said to be a 2-cycle-distributed graph of girth no less than r if its cycle length distribution is such that $c_1=c_2=\cdots=c_{r-1}=0$, $c_i\leqslant 2$ and $\sum_{i=r}^{n} c_i>0$. Let $f_r(n,2)$ be the maximum number of edges in a 2-cycle-distributed graph of girth no less than r. We prove that

$$f_r(n,2)\geqslant n+2k-2r+2+\sqrt{4n-24k^2+8k+4r^2-12r+5},$$

where $k=[(5+\sqrt{60n+60(r^2-3r)+85})/30]$.

Key words: cycle; cycle distribution graph ; cycle length distribution