短文

单输入单输出系统的同时稳定：多项式方法

肖　建
(西南交通大学电气工程系　成都　610031)

摘　要

基于系统的传递函数表示，讨论了两个 SISO 对象的同时稳定问题，给出了该问题有解的充要条件. 得出了两个 SISO 对象中的一个的闭环极点可以任意配置而另一个对象的闭环极点则有赖于两个对象的零极结构的结论.

关键词：线性定常系统，反馈镇定，鲁棒控制.

1　引言

同时稳定问题是鲁棒控制中的一个重要问题，文[1,2]首次讨论这一问题. 近年来，这个问题得到了广泛的研究[3-6]. 当所讨论的同时稳定问题几乎常有解时，存在着许多简单而有效的控制器计算方法. 但是，当所考虑的问题几乎不是常有解，例如同时稳定两个以上的 SISO 对象时，目前尚缺乏简单而有效的算法. 文[5]提出了同时稳定两个和三个 SISO 对象的条件. 它所讨论的系统是以真有理函数分式表示的，计算比较复杂，并且不能明显地揭示闭环极点的位置.

本文基于多项式方法，即采用传递函数来表示 SISO 系统，讨论两个 SISO 对象的同时稳定问题. 与目前几乎所有的文献中所采用的将系统用真有理函数分式表示法相比，本文的方法一方面符合传统的习惯，易于被人们接受；另一方面，控制器的计算十分简便，可以明确地显示出闭环极点的位置.

本文中各量除另有说明外均是 S 多项式.

2　主要结论

设 $P_1=n_1/d_1$, $P_2=n_2/d_2$ 和 $C=y/x$, 分别是被控对象 P_1, P_2 和控制器 C 的传

本文于1993年11月22日收到

递函数,先讨论 $\deg(d_1)=\deg(d_2)$ 的情况,这时,闭环特征多项式 F_1 和 F_2 满足

$$d_1x+n_1y=F_1, \tag{1}$$

$$d_2x+n_2y=F_2, \tag{2}$$

以上两式的两边分别同乘 F_2 和 F_1, 并相减可得

$$(d_1F_2-d_2F_1)x+(n_1F_2-n_2F_1)y=0. \tag{3}$$

令

$$d_1F_2-d_2F_1=Be_{12}, \tag{4}$$

$$n_2F_1-n_1F_2=Ae_{12}, \tag{5}$$

其中 A,B 互质,则(3)式的最小阶次解为 $x=A$ 和 $y=B$. 代入(1)式得

$$e_{12}=d_1n_2-d_2n_1. \tag{6}$$

从而有

$$x=\frac{n_2F_1-n_1F_2}{e_{12}},\qquad y=\frac{d_1F_2-d_2F_1}{e_{12}}. \tag{7}$$

综上所述, F_1 和 F_2 应满足使得 $d_1F_2-d_2F_1$ 和 $n_2F_1-n_1F_2$ 具有公因子 e_{12}, 即 e_{12} 的每一零点必须为 $d_1F_2-d_2F_1$ 和 $n_2F_1-n_1F_2$ 的具有相同重数的公共零点.

为满足这一要求, 令 C^+ 和 C^- 分别表示复平面的闭右半平面和开左半平面, 设 z_i, $i=1,\cdots,k$ 为 e_{12} 的 r_i 重 C^- 零点; $z_j,j=k+1,\cdots,m$, 为 e_{12} 的 r_j 重 C^+ 零点. 对 e_{12} 的 C^- 零点,可以令 F_1 和 F_2 均含因子 $(s-z_1)^{r_1}\cdots(s-z_k)^{r_k}$. 而对 e_{12} 的 C^+ 零点,则选择 F_1 和 F_2, 满足以下插值条件:

i) F_1 和 F_2 为同阶的 Hurwitz 多项式.

ii) 对 e_{12} 的任意 C^+ 零点 z_j, 有

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\frac{F_2(s)}{F_1(s)}\bigg|_{s=z_j}=\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\frac{n_2(s)}{n_1(s)}\bigg|_{s=z_j}, \tag{8}$$

$$i=0,1,\cdots,r_j-1,\ 若\ d_1(z_j)=0;$$

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\frac{F_2(s)}{F_1(s)}\bigg|_{s=z_j}=\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\frac{d_2(s)}{d_1(s)}\bigg|_{s=z_j}, \tag{9}$$

$$i=0,1,\cdots,r_j-1,\quad 其它;$$

这是一个典型的插值问题.

引理 1. 若 z_j 为 e_{12} 的 r_j 重零点, F_1 和 F_2 满足(8)或(9)式, 则 z_j 也是 $d_1F_2-d_2F_1$ 和 $n_2F_1-n_1F_2$ 的 r_j 重公共零点.

证明. 仅就 $r_j=2$ 且 $d(z_j)\neq 0$ 情况下给出证明,其它情况下证明类似,从略.

由(9)式知,下式成立(以下各多项式除另有说明外均在 $s=z_j$ 处求值,并简记 $d(z_j)$ 为 d):

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{d_2}{d_1}, \tag{10}$$

$$F_1^2(d_2'd_1-d_2d_1')=d_1^2(F_2'F_1-F_2F_1'), \tag{11}$$

由(11)式有

$$F_1\left(d_2'-\frac{d_2}{d_1}d_1'\right)=d_1\left(F_2'-\frac{F_2}{F_1}F_1'\right), \tag{12}$$

将(10)式代入得

$$d_1'F_2 - d_2'F_1 + d_1F_2' - d_2F_1' = 0. \tag{13}$$

即 z_j 为 $d_1F_2 - d_2F_1$ 的二重零点。若 z_j 不是 n_1 和 n_2 的公共零点，则由 $d_1n_2 = d_2n_1$ 类似可证它也为 $n_2F_1 - n_1F_2$ 的二重零点。若 z_j 是 n_1 和 n_2 的二重公共零点，则它显然也是 $n_2F_1 - n_1F_2$ 的二重零点。最后，若 z_j 是 n_1 和 n_2 的单公共零点，但不是二重公共零点，分解 s 多项式 $n_1(s) = n_1(s)(s - z_j)$；$n_2(s) = n_2(s)(s - z_j)$；因 z_j 是 e_{12} 的二重零点，成立 $d_1n_2 = d_2n_1$，由(10)式知 z_j 为 $n_2F_1 - n_1F_2$ 的二重零点。证毕。

值得指出，文[5]中只考虑了 e_{12} 具有单零点的情况。

由(7)式，为保证控制器传函为真，应有

$$\deg(n_2F_1 - n_1F_2) \geqslant \deg(d_1F_2 - d_2F_1). \tag{14}$$

若 P_1 和 P_2 均为严格真，则(14)式通常不成立。为此，可对 F_1 和 F_2 加上如下约束：

$$\left.\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\frac{F_2(s)}{F_1(s)}\right|_{s=\infty} = \left.\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\frac{d_2(s)}{d_1(s)}\right|_{s=\infty}. \tag{15}$$

$$i = 0, 1, \cdots, q-1.$$

类似引理 1 的证明方法可知，若 F_1 和 F_2 满足(15)式，则 $d_1F_2 - d_2F_1$ 的由 s 最高阶次项起前 q 项的系数为零；即 $d_1F_2 - d_2F_1$ 的阶次比其正常阶次降低 q 次，因此，只要 q 足够大即能保证(14)式成立。

下面讨论 $\deg(d_1) \neq \deg(d_2)$ 的情况。不失一般性，设 $\deg(d_1) < \deg(d_2)$，在这种情况下，先设 $\bar{d}_1 = d_1f, \bar{n}_1 = n_1f$，其中 f 为任意指定的 Hurwitz 多项式，使得 $\deg(\bar{d}_1) = \deg(d_2)$，并令 $\bar{P}_1 = \bar{n}_1/\bar{d}_1$，利用上面所述方法，求得同时稳定 $\bar{P}_1$ 和 P_2 的控制器 C。注意到在这种情况下，f 必为 e_{12} 的 C^- 零点，从而可设 $\bar{F}_1$ 和 F_2 均含因子 f，而对应 P_1 的闭环特征多项式 F_1 满足

$$\bar{d}_1x + \bar{n}_1y = \bar{F}_1, \tag{16}$$

令 $F_1 = \bar{F}_1/f$ 即得(1)式。从而 $\deg(d_1) \neq \deg(d_2)$ 两对象的同时稳定问题，与 $\deg(\bar{d}_1) = \deg(d_2)$ 两对象 $\bar{P}_1$ 和 P_2 的同时稳定问题等价。

根据上面的讨论结果和有理函数插值理论的结论[4]，有

定理 1. 存在着传递函数为真的控制器 C，使得 P_1 和 P_2 同时稳定的充要条件是以下各量具有相同的符号：

i) n_1n_2 在 d_1 和 d_2 的所有非负实公共零点上的值；

ii) d_1d_2 在 e_{12} 的其它所有非负实零点上的值；

iii) 当 P_1 和 P_2 均为严格真时，d_1 和 d_2 的最高阶次项的系数。

证略。

推论 1. 设 d_1 和 d_2 无公共非负实零点，则 P_1 和 P_2 能同时稳定当且仅当，在 e_{12} 的非负实零点(包括∞点，若 P_1 和 P_2 均为严格真)之间，d_1 和 d_2 的零点个数之和为偶数。

证明。若 d_1 和 d_2 在 e_{12} 各非负实零点之间的零点个数之和为偶，则 d_1d_2 在这些零点上的值保持相同的符号，由定理 1，本推论成立。

若 P_1 稳定，则 d_1 和 d_2 无公共的非负实零点。文[4]推论 5.4.12 可以看成是推论 1 的一个特例。

因为除 n_1 和 n_2 的公共零点以及 d_1 和 d_2 的公共零点外，在 e_{12} 的其它零点 z_i 上，有 $d_2(z_i)/d_1(z_i)=n_2(z_i)/n_1(z_i)$. 由定理 1 和推论 1，有

推论 2. 若 n_1 和 n_2 无公共的非负实零点，则 P_1 和 P_2 能同时稳定当且仅当，在 e_{12} 的非负实零点之间(包括∞点，若 P_1 和 P_2 均为严格真)，n_1 和 n_2 的零点个数之和为偶数.

证略.

对于满足定理 1 中条件的被控对象 P_1 和 P_2，可利用上面讨论中的步骤得到计算相应控制器的算法，在此不再赘述.

根据有理函数插值方法[4]知，F_1 的零点可以任意配置，而 F_2 的零点则有赖于 F_1 和 e_{12} 的零点的分布，即在 P_1 和 P_2 的同时稳定中，其中一个对象的闭环极点可以任意配置. 这一点十分重要. 例如，若 P_1 为对象正常工作时的模型，P_2 为对象故障后的模型，可以配置 P_1 的闭环极点，使得它在正常工作时具有良好的动态性能，并且当系统故障后，相应于模型 P_2 时，也能保证闭环稳定.

将 C^- 定义成广义稳定区域，令 C^+ 为它的补，则也可以用类似的方法讨论 P_1 和 P_2 在广义稳定区域内的同时稳定问题.

3 算例

$$P_1=\frac{5}{s-0.5},\quad P_2=\frac{1}{s-1}.$$

计算可得 $e_{12}=-4s+4.4$.

选择 Hurwitz 多项式满足

$$\frac{F_1(\infty)}{F_2(\infty)}=1,\quad \frac{F_1(1.1)}{F_2(1.1)}=5.$$

可求得 $F_1=s+9.4$，$F_2=s+1$. 对应的控制器 $C=2$.

参 考 文 献

[1] Sack R, Murry J. Fraction representation, algebraic geometry and simultaneous stabilization problem. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1982, **27**: 895—903

[2] Vidyasagar M, Viswanadham N. Algebraic design techniques for reliable stabilization. *IEEE Trans. Aut Contr.*, 1982, **27**: 1085—1095

[3] Ghosh G K, Byrnes C I. Simultaneous stabilization and simultaneous pole placement by non-switching dynamic compensation. *IEEE Trans. Aut Contr.*, 1983, **28**: 735—741

[4] Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Factorization Approach. MIT Press, 1985.

[5] Debowski A, Kurylowicz A. Simultaneous stabilization of linear SISO plants. *Int. J. Contr.*, 1986, **44**: 1257—1264

[6] 肖建. 具有固定闭环极点的同时稳定. 控制理论与应用. 1990,7(1): 40—46.

SIMULTANEOUS STABILIZATION OF SISO PLANTS: A POLYNOMIAL APPROACH

XIAO JIAN

(*Dept. of Electrical Eng. Southwest Jiantong Univ. Chengdu* 610031)

ABSTRACT

Using system transfer function representation, this paper studies the problem of simultaneous stabilization of two SISO plants, and gives the relavent necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem. It is pointed out that the closed-loop poles of one SISO plant can be arbitrary assigned, while the closed-loop poles of the other plant depend on the pole-zero configuration of the two plants.

Key words: Linear time-invariant system, feedback stabilization, robust control.