

参数不确定系统的 H_∞ 估计问题的 显式解和中心解¹⁾

王正志 周宗潭 张良起

(国防科技大学自控系 长沙 410073)

摘 要 研究在连续时间情形下的具有部分参数不确定性的系统的 H_∞ 状态估计问题, 它可以被化简为带有一个自由可调参数对象的 H_∞ 状态估计, 由此可得到滤波器的简洁通解显式. 并进一步研究了 H_∞ 估计的中心解, 以及它与卡尔曼滤波器的关系. 实例计算表明, 对于参数具有不确定性的系统, H_∞ 滤波器的性能明显地优于卡尔曼滤波器.

关键词 鲁棒性, H_∞ 估计, 卡尔曼滤波.

1 问题的提法

若线性系统的全部参数能准确知道, 在已知谱密度的高斯噪声作用下, 要从输出测量估计线性系统的内部状态, 已由卡尔曼滤波方法解决. 但在许多工程实际问题中, 各噪声源的统计特性难以确定, 甚至不是高斯噪声, 而是有界能量噪声, 这时可以采用 H_∞ 方法估计其内部状态. 如果进一步考虑到对象模型参数具有不确定性, 而仅知道它们各自在一定的区间内变动, 问题就变得更为复杂. 对于部分参数不确定的对象, 在有界能量噪声影响下, 如何进行状态估计, 是此文的研究内容.

考虑连续时间域上的对象 P 的模型

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bw, \quad (1a)$$

$$y = (C + \Delta C)x + Dw, \quad (1b)$$

$$z = Lx \quad (1c)$$

其中 $x \in R^n$ 是状态, $w \in R^m$ 是噪声, $y \in R^r$ 是输出测量, $z \in R^p$ 是要估计的状态组合. A, B, C, D 和 L 是已知的实数矩阵, 各为 $n \times n, n \times m, r \times n, r \times m$ 和 $p \times n$ 维, 它们是标称对象的全部参数. 假设 A 是稳定矩阵, (1) 式中 ΔA 和 ΔC 表示对象参数的不确定性. 假设

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} FE. \quad (2)$$

其中 H_1, H_2 和 E 分别为 $n \times b_1, r \times b_1, b_2 \times n$ 维的已知矩阵, 它们反映不确定参数所处的位置 and 变化幅度. 而 $b_1 \times b_2$ 维的未知实矩阵 F 在单位球 $F^T F \leq I$ 中变动, 从而引起 ΔA 和

1) 此课题得到国家自然科学基金资助.

ΔC 的变化.

设计估计状态组合 z 的滤波器 Q :

$$\dot{x}_e = A_e x_e + K_e y, \quad (3a)$$

$$z_e = L_e x_e \quad (3b)$$

其估计误差为 $e = z - z_e$. 对象 P 和滤波器 Q 组成的系统, 其状态方程可紧凑地写为

$$\dot{\xi} = (A_c + H_c F E_c) \xi + B_c w, \quad (4a)$$

$$e = C_c \xi. \quad (4b)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} A & O \\ K_e C & A_e \end{bmatrix}, \\ B_c &= \begin{bmatrix} B \\ K_e D \end{bmatrix}, \quad H_c = \begin{bmatrix} H_1 \\ K_e H_2 \end{bmatrix} \\ C_c &= [L \quad -L_e], \quad E_c = [E \quad 0]. \end{aligned} \quad (5)$$

于是从噪声 w 到估计误差 e 的传递函数为

$$T(S) = C_c [SI - (A_c + H_c F E_c)]^{-1} B_c. \quad (6)$$

对于小正数 γ , 定义 H_∞ 估计问题

$$\|T(S)\|_\infty < \gamma, \quad (7)$$

即要设计滤波器 Q , 使得对于各种有界噪声 w , 均有较小的估计误差 e .

由于 $T(S)$ 中含有未知矩阵 F , 造成处理上的困难, 为了克服此困难, 考虑带有正参数 δ 的对象 P_δ :

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} + [B \quad \gamma \delta^{-1} H_1] \bar{w}, \quad (8a)$$

$$\bar{y} = C \bar{x} + [D \quad \gamma \delta^{-1} H_2] \bar{w}, \quad (8b)$$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} L \\ \delta E \end{bmatrix} \bar{x}. \quad (8c)$$

其中新的有界噪声 $\bar{w} \in R^{m+b_1}$, 输出 $\bar{z} \in R^{p+b_2}$, 采用(3)式的滤波器 Q , 并且用

$$\bar{z}_e = \begin{bmatrix} z_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_e \\ 0 \end{bmatrix} x_e \quad (9)$$

来估计 \bar{P}_δ 的输出 \bar{z} , 所产生的估计误差为

$$\bar{e} = \bar{z} - \bar{z}_e = \begin{bmatrix} L & -L_e \\ \delta E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_e \end{bmatrix}. \quad (10)$$

带参数 δ 的对象 P_δ 和滤波器 Q 组成的系统, 可紧凑地写成

$$\dot{\bar{\xi}} = A_c \bar{\xi} + \bar{B}_c \bar{w}, \quad (11a)$$

$$\bar{e} = C_c \bar{\xi}. \quad (11b)$$

其中

$$\bar{B}_c = [B_c \quad \gamma \delta^{-1} H_c], \quad \bar{C}_c = \begin{bmatrix} C_c \\ \delta E_c \end{bmatrix}, \quad (12)$$

从有界能量噪声 \bar{w} 到估计误差 \bar{e} 的传递函数为

$$T_\delta(S) = \bar{C}_c(SI - A_c)^{-1}\bar{B}_c. \quad (13)$$

采用类似于文献[9]定理 1 的证明思路,有如下定理.

定理 1. 若存在一个正数 δ ,使得 P_δ 被滤波器 Q 估计的误差传递函数 $T_\delta(S)$ 满足

$$\|T_\delta(S)\|_\infty < \gamma, \quad (14)$$

则对于原来的参数不确定对象 P ,该滤波器 Q 产生的估计误差传递函数 $T(S)$ 满足(7)式.

2 问题的通解

定理 1 表明,解决了带有正参数 δ 的对象 P_δ 的 H_∞ 估计问题(14),就可以保证原来的参数不确定对象 P 的 H_∞ 估计精度(7). (14)式可在 H_∞ 标准控制问题的框架中求解. H_∞ 标准控制问题一直是 H_∞ 控制的核心问题,经过许多控制学者的努力,已有多种解法^[1-4],但多数解法步骤复杂,解式与对象的状态空间表示矩阵的关系不直观.此文采用我们近年来推导的公式写出通解,十分简洁,与对象的原始表达式的关系非常直观.由于推导过程比较复杂,本文仅在下述引理中直接给出结果,其推导过程可参阅文献[8].

引理 广义对象

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

的 H_∞ 标准控制问题,在 $D_{11}=0, D_{22}=0$,以及 D_{12} 满列秩, D_{21} 满行秩的情形下,可按如下步骤求解.首先分别求出 Riccati 方程

$$\begin{aligned} (A - B_2 D_{12}^+ C_1)^T X + X(A - B_2 D_{12}^+ C_1) + C_1^T D_{12}^{\perp T} D_{12}^{\perp} C_1 \\ + X(B_1 B_1^T - B_2 D_{12}^+ D_{12}^{+T} B_2^T) X = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (A - B_1 D_{21}^+ C_2) Y + Y(A - B_1 D_{21}^+ C_2)^T + B_1 D_{21}^{\perp} D_{21}^{\perp T} B_1^T \\ + Y(C_1^T C_1 - C_2^T D_{21}^{+T} D_{21}^+ C_2) Y = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

的镇定解 $X \geq 0, Y \geq 0$. 再设

$$l = D_{12}^{\perp T} D_{12}^{\perp} C_1 - D_{12}^{+T} B_2^T X \quad (18a)$$

$$V = D_{21}^{\perp} D_{21}^{\perp T} B_1^T - D_{21}^+ C_2 Y, \quad (18b)$$

$$F = D_{12} (D_{12}^T D_{12})^{-1/2}, \quad (18c)$$

$$H = D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1/2}, \quad (18d)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} -SI - X^+ (A^T X + C_1^T l) & - (I - YX)^{-1} (Y C_1^T - X^+ l^T) F & - (I - YX)^{-1} (B_1 - V^T) H \\ \hline D_{12}^+ (C_1 - l) & D_{12}^+ F & 0 \\ -C_2 - D_{21} B_1^T X & 0 & D_{21} H \end{bmatrix} \quad (19)$$

由此可以写出 H_∞ 标准控制问题的通解

$$Q = - (\Pi_{11} \Phi + \Pi_{12}) (\Pi_{21} \Phi + \Pi_{22})^{-1}, \Phi \in BH_\infty^{p \times \gamma} \quad (20)$$

(14)式所对应的广义对象(15)式为

$$\begin{aligned} B_1 &= [\gamma^{-1}B \quad \delta^{-1}H_1], & B_2 &= 0, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} L \\ \delta E \end{bmatrix}, & C_2 &= C, \\ D_{11} &= 0, & D_{12} &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ D_{21} &= [\gamma^{-1}D \quad \delta^{-1}H_2], & D_{22} &= 0. \end{aligned}$$

把以上诸式代入引理的(16)–(20)式,得出下面的主要结果.

定理 2. 对于参数不确定对象 P ,若在(1)和(2)式中, A 是稳定矩阵, $[\gamma^{-1}D \quad \delta^{-1}H_2]$ 具有满行秩. 分别求出如下两个 Riccati 方程:

$$A^T X + XA + \delta^2 E^T E + X(\gamma^{-2}BB^T + \delta^{-2}H_1H_1^T)X = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &[A - (\gamma^{-2}BD^T + \delta^{-2}H_1H_2^T)(\gamma^{-2}DD^T + \delta^{-2}H_2H_2^T)^{-1}C]Y \\ &+ Y[A - (\gamma^{-2}BD^T + \delta^{-2}H_1H_2^T)(\gamma^{-2}DD^T + \delta^{-2}H_2H_2^T)^{-1}C]^T \\ &+ \gamma^{-2}BB^T + \delta^{-2}H_1H_1^T - (\gamma^{-2}BD^T + \delta^{-2}H_1H_2^T) \\ &\quad (\gamma^{-2}DD^T + \delta^{-2}H_2H_2^T)^{-1}(\gamma^{-2}DB^T + \delta^{-2}H_2H_1^T) \\ &+ Y[L^T L + \delta^2 E^T E - C^T(\gamma^{-2}DD^T + \delta^{-2}H_2H_2^T)^{-1}C]Y = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

的镇定解 $X \geq 0, Y \geq 0$. 如果有

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

则带有正参数 δ 的对象 P_δ 的 H_∞ 估计问题(14)有解,从而参数不确定的对象 P 的 H_∞ 估计问题(7)也有解,其 H_∞ 滤波器的通解为

$$Q = -(\Pi_{11}\Phi + \Pi_{12})(\Pi_{21}\Phi + \Pi_{22})^{-1}, \Phi \in BH_\infty^{p \times r} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + (\gamma^{-2}BB^T + \delta^{-2}H_1H_1^T)X & -(I - YX)^{-1}YL^T & -(I - YX)^{-1}(\gamma^{-2}BD^T + \delta^{-2}H_1H_2^T + YC^T)(\gamma^{-2}DD^T + \delta^{-2}H_2H_2^T)^{-1/2} \\ L & I & 0 \\ -C - (\gamma^{-2}DB^T + \delta^{-2}H_2H_1^T)X & 0 & (\gamma^{-2}DD^T + \delta^{-2}H_2H_2^T)^{-1/2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

而 $BH_\infty^{p \times r}$ 是 $H_\infty^{p \times r}$ 空间中的单位球.

3 中心滤波器及其与卡尔曼滤波器的比较

(24)式中,对于所有在 $BH_\infty^{p \times r}$ 中的 Φ ,得到的滤波器 Q 都满足 H_∞ 估计精度要求(7). 在所有这些滤波器中,中心解给出的中心滤波器 Q_0 最值得注意. 令(24)式中 $\Phi = 0$,得到中心解,由此得到 H_∞ 中心滤波器 Q_0 为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A + (\gamma^{-2}BB^T + \delta^{-2}H_1H_1^T)X)\hat{x} \\ &+ (I - YX)^{-1}(\gamma^{-2}BD^T + \delta^{-2}H_1H_2^T + YC^T)(\gamma^{-2}DD^T + \delta^{-2}H_2H_2^T)^{-1} \\ &\quad (Y - (C + \gamma^{-2}DB^T X + \delta^{-2}H_2H_1^T X)\hat{x}), \end{aligned}$$

$$\hat{z} = L\hat{x}. \quad (25)$$

特别对于参数确定的对象,在(2)式中有

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad E = 0$$

于是 Riccati 方程(21)的解为 $X=0$, 而 Riccati 方程(22)为

$$(A - BY^{-2}D^T(DY^{-2}D)^{-1}C)Y + Y(A - BY^{-2}D^T(DY^{-2}D)^{-1}C)^T + BY^{-2}B^T - BY^{-2}D^T(DY^{-2}D)^{-1}DY^{-2}B^T + Y(L^T L - C^T(DY^{-2}D)^{-1}C)Y = 0 \quad (26)$$

所以参数确定的对象的 H_∞ 中心滤波器为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + (BY^{-2}D^T + YC^T)(DY^{-2}D)^{-1}(y - C\hat{x}), \\ \hat{z} &= L\hat{x}. \end{aligned} \quad (27)$$

为了把 H_∞ 中心滤波器与卡尔曼滤波器进行比较,在参数确定的对象模型(1)中, $\Delta A = 0, \Delta C = 0$, 假设 w 为零均值高斯白噪声,其协方差阵为

$$E[w(t)w^T(\tau)] = R \delta(t - \tau), \quad (28)$$

其卡尔曼滤波器为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + (BRD^T + Y_1C^T)(DRD^T)^{-1}(y - C\hat{x}), \\ \hat{z} &= L\hat{x}. \end{aligned} \quad (29)$$

其中 Y_1 满足 Riccati 方程

$$(A - BRD^T(DRD^T)^{-1}C)Y_1 + Y_1(A - BRD^T(DRD^T)^{-1}C)^T + BRB^T - BRD^T(DRD^T)^{-1}DRB^T - Y_1C^T(DRD^T)^{-1}CY_1 = 0 \quad (30)$$

把参数准确的对象的 H_∞ 中心滤波器(27)与卡尔曼滤波器(29)相比较发现:若认为

$$R = \gamma^{-2}I, \quad (31)$$

两者就非常相似. 唯一的差别是 Riccati 方程(26)比 Riccati 方程(30)多了一项 YL^TLY . 不难看出 $Y \geq Y_1$. 在 γ 充分大时, (26)式中 $C^T(DY^{-2}D)^{-1}C \gg L^T L$. 这时可以略去 $L^T L$, 从而(26)式变为(30)式. 故在 γ 充分大时, H_∞ 中心滤波器就变为卡尔曼滤波器.

表 1 H_∞ 中心滤波器与卡尔曼滤波器的比较

	卡尔曼滤波器 (对象参数准确)	H_∞ 中心滤波器 (对象参数准确)	H_∞ 中心滤波器 (对象参数具有不准确性)
外推率	$A\hat{x}$	$A\hat{x}$	$(A + (\gamma^{-2}BB^T + \delta^{-2}H_1H_1^T)X)\hat{x}$
新息	$Y - C\hat{x}$	$Y - Cx$	$Y - (C + \gamma^{-2}DB^T X + \delta^{-2}H_2H_2^T X)\hat{x}$
新息增益	$(BRD^T + Y_1C^T)(DRD^T)^{-1}$	$(BY^{-2}D + YC^T)(DY^{-2}D)^{-1}$	$(I - YX)^{-1}(\gamma^{-2}BD^T + \delta^{-2}H_1H_1^T + YC^T)(\gamma^{-2}DD^T + \delta^{-2}H_2H_2^T)^{-1}$

4 实例与结论

用一个实例,比较 H_∞ 滤波器与卡尔曼滤波器的性能. 若参数不准确对象为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1.0 & -2.5 \\ -0.2 & -1.0 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 2], & D &= 0.01, \\ L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & H &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & H_2 &= 1, & E &= 0.4. \end{aligned}$$

若我们希望 H_∞ 滤波器的精度(7)达到 $\gamma=0.1$, 取自由参数 $\delta=1$, 由 Riccati 方程(21)和(22)解出

$$X = \begin{bmatrix} 0.14998 & -0.28907 \\ -0.28907 & 0.77234 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.19938 & -0.08285 \\ -0.08285 & 0.04121 \end{bmatrix}.$$

由(25)式给出 H_∞ 中心滤波器为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -0.85430 & -2.77652 \\ -0.20856 & -0.97489 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1.09314 \\ -0.00766 \end{bmatrix} (y - [1.14570 \quad 1.72349] \hat{x}),$$

而由(30)和(29)得到卡尔曼滤波器为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -1.0 & -2.5 \\ -0.2 & -1.0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (y - [1 \quad 2] \hat{x}).$$

在常值干扰下(即 w 为单位阶跃), 比较二者的滤波估计性能. 图 1 表示对象参数完全准确的情形($F=0$), 这时卡尔曼滤波器是最优滤波器, 估出的曲线(c)几乎与真实状态

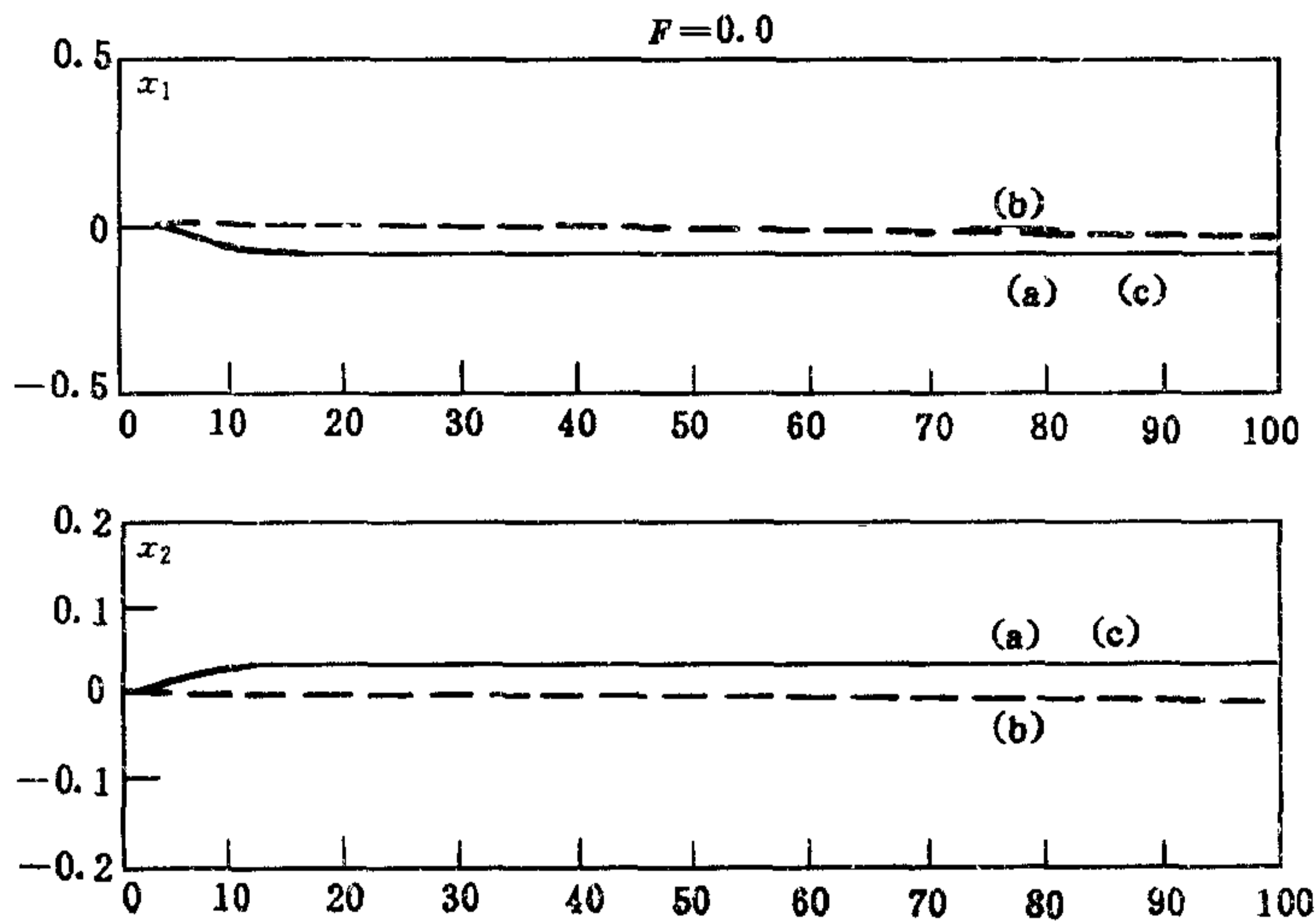


图 1 对象参数完全准确的情形($F=0.0$)

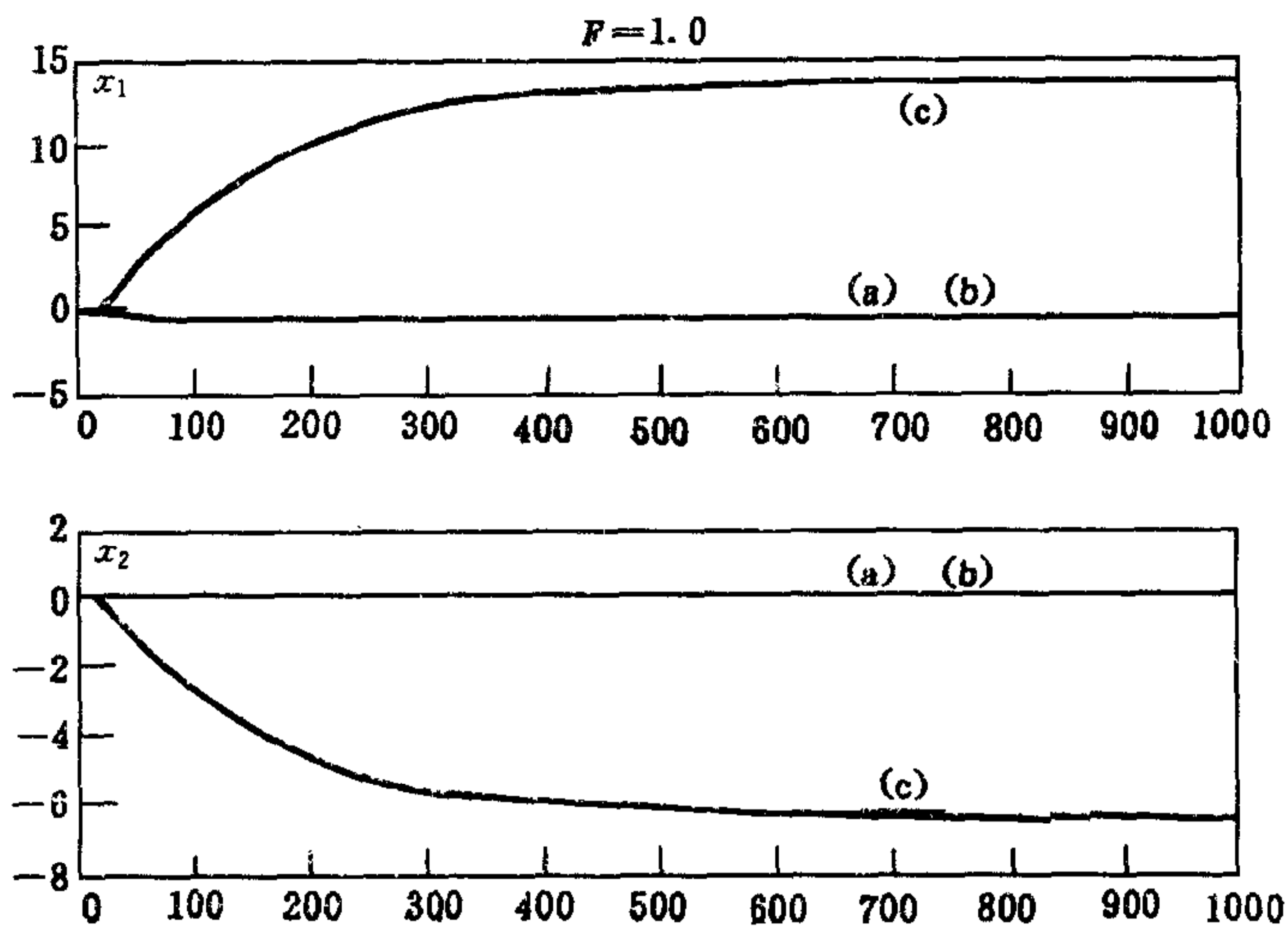
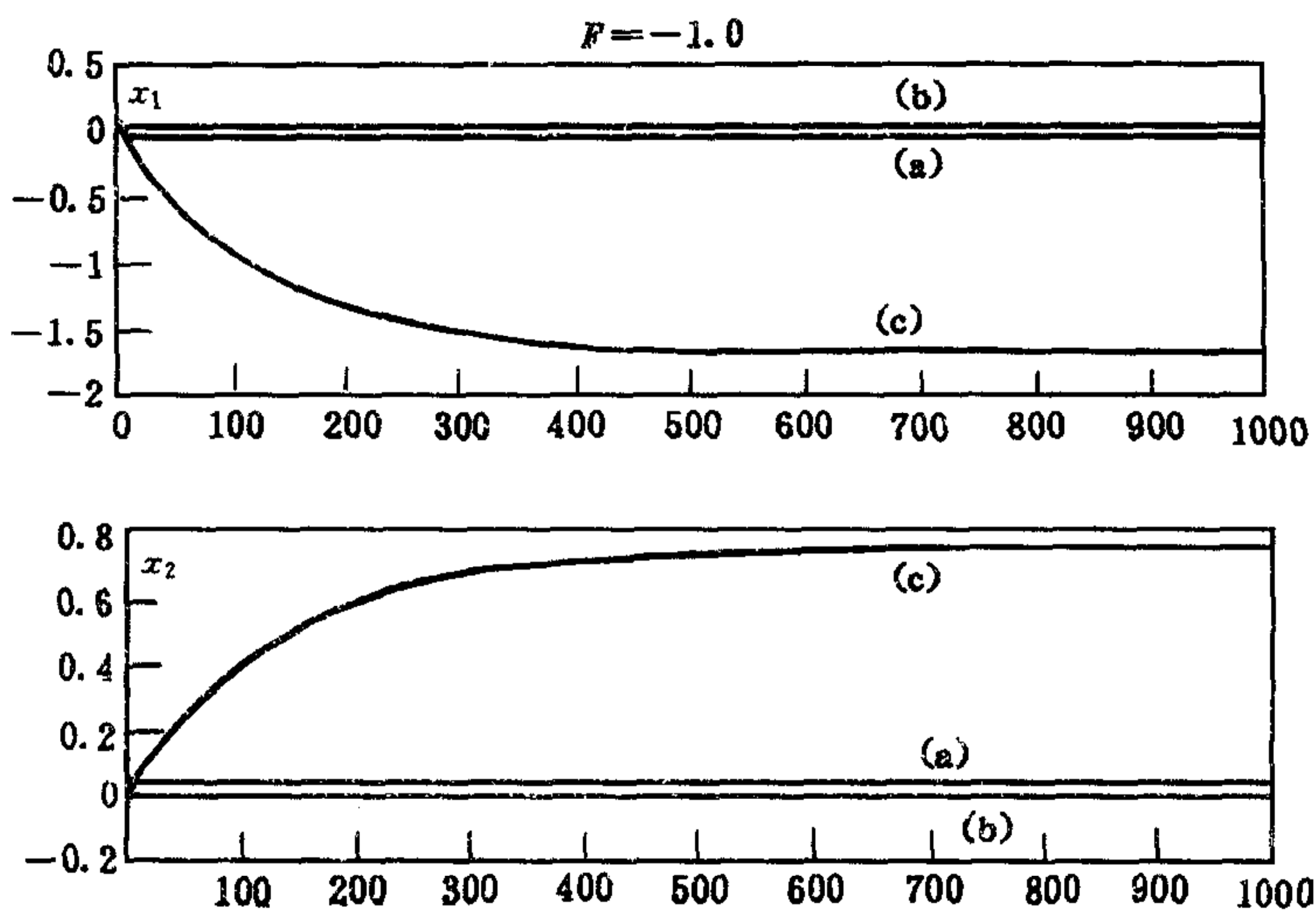
(a) 真实状态 (b) H_∞ 中心滤波器的估计 (c) Kalman 滤波器的估计

(a) 完全重合; 而 H_∞ 中心滤波器的估计(b)与真实状态(a)略有差别, 但估计误差小于 $\gamma=0.1$.

图 2 表示对象的部分参数不准确的情形($F=1.0$), 这里 a_{11} 由 -1.0 变为 -0.6 , C_1 由 1.0 变为 1.4 . 这时卡尔曼滤波器的估值曲线(c)与真实状态(a)之间发生巨大的偏差; 而 H_∞ 中心滤波器的估值曲线(b)则与真实状态(a)几乎重合在一起, 估计误差小于 $\gamma=0.1$.

图 3 表示对象的部分参数不准确的另一种情形($F=-1.0$), 这里 a_{11} 由 -1.0 变为 -1.4 , c_1 由 1.0 变为 0.6 . 这时卡尔曼滤波器的估值曲线(c)与真实状态(a)也发生很大偏差; 而 H_∞ 中心滤波器的估值曲线(b)与真实状态(a)相当接近, 估计误差小于 $\gamma=0.1$.

总之, 在对象参数具有不确实性时, 本文给出的 H_∞ 滤波器的性能明显优于卡尔曼滤波器. 本文推导的 H_∞ 中心滤波器, 形式简洁, 性能优越, 可望在实际控制工程中得到广泛应用.

图 2 对象的部分参数不准确的情形($F=1.0$)图 3 对象的部分参数不准确的另一情形($F=-1.0$)

参 考 文 献

- [1] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P, Francis B A. State-space Solution to Standard H_2 and H_∞ Control Problem. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, **34**(8):831-847.
- [2] Glover K, Doyle J C. State-space formulae for all stabilizing controllers that Satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity. *System and Control Letters*, 1988, **11**:167-172.
- [3] Kimura H, Lu Y, Kawatani R. On the Structure of H_∞ control systems and related extensions. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, **36**(6):653-667.
- [4] Francis B A. A Course in H_∞ Control Theory. Springer Verlag. 1987.
- [5] Nagpal K, M, Khargonekar P. Filtering and smoothing in an H_∞ setting. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, **36**(2):152-166.

- [6] Shaked U. H_∞ minimum error state estimation of Linear Stationary Processes. *IEEE Trans. Automatic control*, 1990, **35**(5):554—558.
- [7] Xie L, De Souza C E, Fu M. H_∞ Estimation for discrete-time linear uncertain systems. *International Journal of Roboust and Nonlinear Control*, 1991,1(2):111—123.
- [8] 王正志,周宗潭. 状态空间中标准 H_∞ 问题的直接求解公式. 中国控制会议论文集,1994,146—150.
- [9] 王正志,部分参数不准确的线性系统的鲁棒性控制,自动化学报,1995,**21**(4):455—459.

THE EXPLICIT SOLUTIONS AND CENTRAL SOLUTION OF H_∞ ESTIMATION PROBLEM FOR UNCERTAIN PARAMETER SYSTEMS

WANG ZHENGZHI ZHOU ZONGTAN ZHANG LIANGQI

(Dept. of Automatic Control, National Univ. of Defense science and Technology, Changsha 410073)

Abstract This paper is concerned with the H_∞ estimation problem for linear continuous-time systems with part of parameters uncertainty. It can be simplified as a H_∞ estimation problem for a plant with a free rejustable parameter. Thus the filter expressions are given in simple and explicit way. This paper is further concerned with the central filter of H_∞ estimation, and its relations to Kalman filter. Simulation results show that the performance of H_∞ filter is much better than Kalman filter for the systems with uncertain parameters.

Key words Robustness, H_∞ estimation, Kalman filter.

王正志 1967年毕业于哈尔滨军事工程学院自动控制专业. 1981年至1984年在美国Rice大学电气工程系进修,并获得博士学位. 现任国防科技大学教授和博士生导师. 研究领域为飞行器控制,智能控制和遥感技术.

周宗潭 26岁. 1994年毕业于国防科技大学自控系,获得硕士学位. 现为国防科技大学自动控制系博士研究生,攻读博士学位.

张良起 毕业于上海交通大学电机系,曾任国防科技大学校长,现为国防科技大学自控系教授和博士生导师. 研究领域为飞行器控制,武器装备自动化和智能机器人等.