第24卷 第2期
1998年3月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 24, No. 2
March., 1998

短 文

不确定时滞系统的输出反馈稳定化控制器设计[1)]

俞 立 王万良
(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310014)

褚 健
(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

摘 要 研究了一类具有时变参数不确定性的时滞系统输出反馈鲁棒镇定问题,证明了这样的问题可以转化成不带任何不确定性的线性时不变系统的 H_∞ 控制问题,从而应用现有 H_∞ 控制问题的求解方法得到不确定时滞系统的稳定化输出动态反馈控制器设计方法.

关键词 鲁棒控制,输出反馈,不确定系统,时滞

1 引言

近年来,对时滞系统的鲁棒镇定问题研究已取得了很大的进展. 不仅在理论上给出了一些有效的分析和综合方法[1—5],而且在应用中也取得了一定的成功[6]. 然而这些研究结果都是建立在系统状态可以直接测量的假定基础上,采用的控制器是无记忆的线性状态反馈控制律. 但在实际系统中,系统的状态往往不能直接测量得到,因此,一个很自然的问题是如何用输出的信息来镇定所考虑的不确定时滞系统. 在这方面,文献[7]提出了基于观察器的鲁棒稳定化控制器设计方法. 然而,它所考虑的系统是很特殊的,对更一般的不确定时滞系统的输出反馈鲁棒镇定问题仍尚未得到很好的解决.

本文研究具有时变参数不确定性的时滞系统的输出反馈鲁棒镇定问题. 所考虑的系统不仅在输入矩阵中,而且在输出方程中均存在不确定性,另外,系统的滞后时间允许是时变的. 对于这类系统,利用 Lyapunov 稳定性理论,证明了其输出反馈鲁棒镇定问题可以转化成一个不带任何不确定参数的线性时不变系统的 H_∞ 控制问题,从而,应用现有的一些求解 H_∞ 控制问题的方法,可以得到所考虑的不确定时滞系统稳定化输出动态反馈控制器的设计方法.

1) 浙江省自然科学基金和国家自然科学基金资助课题.
收稿日期 1996-06-10

2 问题的描述

考虑由以下状态方程描述的不确定时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A_0+\Delta A_0(t)]\boldsymbol{x}(t)+[A_1+\Delta A_1(t)]\boldsymbol{x}(t-d(t))+[B_0+\Delta B_0(t)]\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=[C+\Delta C(t)]\boldsymbol{x}(t)+[D+\Delta D(t)]\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\quad t\in[-d^*\quad 0],\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{y}(t)\in\boldsymbol{R}^p$ 分别是系统的状态向量，输入向量和测量输出向量，A_0, A_1, B_0, C,D 是描述名义系统的适当维数的常数矩阵，$\Delta A_0(\cdot)$, $\Delta A_1(\cdot)$, $\Delta B_0(\cdot)$, $\Delta C(\cdot)$, $\Delta D(\cdot)$是不确定实值矩阵函数,它们反映了系统模型中的时变参数不确定性，$d(t)$是满足

$$0\leq d(t)\leq d^*<\infty,\quad \dot{d}(t)\leq\rho<1\tag{2}$$

的任意有界函数,$\boldsymbol{\varphi}(t)$是一个定义在区间$[-d^*\quad 0]$上的实值连续向量函数.

本文考虑的不确定性假定是范数有界的,且具有以下结构

$$\begin{bmatrix}\Delta A_0(t) & \Delta B_0(t)\\ \Delta C(t) & \Delta D(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_1\\ H_2\end{bmatrix}F(t)[E_1\quad E_2],\quad \Delta A_1(t)=H_dF(t)E_d,\tag{3}$$

其中 H_1,H_2,H_d, E_1,E_2, E_d 是具有适当维数的常数矩阵,它们反映了不确定性的结构，$F(t)\in\boldsymbol{R}^{i\times j}$是一个具有 Lebesgue 可测元的未知矩阵,且满足

$$F^T(t)F(t)\leq I,\tag{4}$$

其中 I 是适当维数的单位矩阵.

进而,假定矩阵 A_1 有秩分解 $A_1=A_{11}A_{12}$，其中 $A_{11}\in\boldsymbol{R}^{n\times r}$, $A_{12}\in\boldsymbol{R}^{r\times n}$, $r=\mathrm{rank}(A_1)$. 注意到这样的分解总是可以的,然而并不是唯一的,例如

$$A_1=A_{11}A_{12}=(A_{11}V)(V^{-1}A_{12}),$$

其中 $V\in\boldsymbol{R}^{r\times r}$是任意非奇异矩阵.

本文要研究的问题是:对给定的不确定时滞系统(1—4),设计一个无记忆输出动态反馈控制器

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=A_c\boldsymbol{\xi}(t)+B_c\boldsymbol{y}(t),\quad \boldsymbol{u}(t)=C_c\boldsymbol{\xi}(t),\tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}(t)\in\boldsymbol{R}^q$, A_c, B_c, C_c 是适当维数的常数矩阵,使得所导出的不确定闭环系统是二次稳定的.

为此,首先引进不确定时滞系统二次稳定的概念.

定义. 对没有外界作用 (即 $\boldsymbol{u}(t)=0$) 的不确定时滞系统(1)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A_0+\Delta A_0(t)]\boldsymbol{x}(t)+[A_1+\Delta A_1(t)]\boldsymbol{x}(t-d(t)),\tag{6}$$

如果存在对称矩阵 $P>0$, $R>0$ 和一个正常数 $\alpha>0$,使得对任意允许的不确定性,以下的 Lyapunov 泛函

$$V(\boldsymbol{x}_t)=\boldsymbol{x}^T(t)P\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{x}^T(\tau)R\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{7}$$

沿系统任意轨线的时间导数满足

$$L(\boldsymbol{x}_t,t)\leq-\alpha\|\boldsymbol{x}(t)\|^2,\tag{8}$$

则系统 (6) 称为是二次稳定的.

由文献[8]中的定理 4.2.6 知,若系统(6)是二次稳定的,则该系统是大范围一致渐近稳定的.

3 鲁棒输出反馈镇定

本节提出系统(1)可以用输出反馈控制器(5)鲁棒二次镇定的条件. 事实上,在控制器(5)作用下,相应的闭环系统可以写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c(t) = [A + HFE]\boldsymbol{x}_c(t) + [\overline{A}_{11}\overline{A}_{12} + \overline{H}_d F(t)\overline{E}_d]\boldsymbol{x}_c(t - d(t)), \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_c(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{n+q}, && A = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 C_c \\ B_c C & A_c + B_c D C_c \end{bmatrix}, \\ &H = \begin{bmatrix} H_1 \\ B_c H_2 \end{bmatrix}, && \overline{H}_d = \begin{bmatrix} H_d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &\overline{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, && \overline{A}_{12} = \begin{bmatrix} A_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &E = [E_1 \quad E_2 C_c], && \overline{E}_d = [E_d \quad 0]. \end{aligned} \tag{10}$$

以下的定理给出了闭环系统(9)二次稳定的一个充分条件.

定理 1. 若存在正定矩阵 $P \in \boldsymbol{R}^{(n+q)\times(n+q)}$,使得以下的矩阵不等式成立

$$\begin{aligned} S = & PA + A^T P + P(HH^T + \overline{A}_{11}\overline{A}_{11}^T + \overline{H}_d \overline{H}_d^T)P \\ & + E^T E + \frac{1}{1-\rho}(\overline{A}_{12}^T \overline{A}_{12} + \overline{E}_d^T \overline{E}_d) < 0, \end{aligned} \tag{11}$$

则系统(9)是二次稳定的.

证明. 如果存在 $P>0$, 使得矩阵不等式(11)成立. 考虑以下的 Lyapunov 泛函

$$V(\boldsymbol{x}_c) = \boldsymbol{x}_c^T(t) P \boldsymbol{x}_c(t) + \frac{1}{1-\rho}\int_{t-d(t)}^{t} \boldsymbol{x}_c^T(\tau)(\overline{A}_{12}^T \overline{A}_{12} + \overline{E}_d^T \overline{E}_d)\boldsymbol{x}_c(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则相应于闭环系统(9),$V(\boldsymbol{x}_c)$关于时间的导数是

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}_c, t) = & \boldsymbol{x}_c^T(t)[PA + A^T P + \frac{1}{1-\rho}(\overline{A}_{12}^T \overline{A}_{12} + \overline{E}_d^T \overline{E}_d)]\boldsymbol{x}_c(t) \\ & + 2\boldsymbol{x}_c^T(t) PHF(t) E \boldsymbol{x}_c(t) + 2\boldsymbol{x}_c^T(t) P\overline{A}_{11}\overline{A}_{12}\boldsymbol{x}_c(t-d(t)) \\ & + 2\boldsymbol{x}_c^T(t) P\overline{H}_d F(t)\overline{E}_d \boldsymbol{x}_c(t-d(t)) \\ & - \frac{1}{1-\rho}\boldsymbol{x}_c^T(t-d(t))(\overline{A}_{12}^T \overline{A}_{12} + \overline{E}_d^T \overline{E}_d)\boldsymbol{x}_c(t-d(t))(1-\dot{d}(t)). \end{aligned} \tag{12}$$

由于对满足 $F^T F \leq I$ 的任意矩阵 $F \in R^{i\times j}$

$$2\boldsymbol{x}^T F \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} \tag{13}$$

对所有 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^i$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^j$ 成立,故有

$$2\boldsymbol{x}_c^T(t) PHF(t) E\boldsymbol{x}_c(t) \leq \boldsymbol{x}_c^T(t) PHH^T P\boldsymbol{x}_c(t) + \boldsymbol{x}_c^T(t) E^T E\boldsymbol{x}_c(t),$$

$$2\boldsymbol{x}_c^T(t) P\overline{A}_{11}\overline{A}_{12}\boldsymbol{x}_c(t-d(t)) \leq \boldsymbol{x}_c^T(t) P\overline{A}_{11}\overline{A}_{11}^T P\boldsymbol{x}_c(t) + \boldsymbol{x}_c^T(t-dt))\overline{A}_{12}^T \overline{A}_{12}\boldsymbol{x}_c(t-d(t)),$$

$$2\boldsymbol{x}_c^T(t) P\overline{H}_d F(t)\overline{E}_d \boldsymbol{x}_c(t-d(t)) \leq \boldsymbol{x}_c^T(t) P\overline{H}_d \overline{H}_d^T P\boldsymbol{x}_c(t) + \boldsymbol{x}_c^T(t-d(t))\overline{E}_d^T \overline{E}_d \boldsymbol{x}_c(t-d(t)).$$

把以上的不等式代入到(12)式中,经整理以及根据条件(11),得到

$$L(\boldsymbol{x}_c,t) \le \boldsymbol{x}_c^T(t)S\boldsymbol{x}(t) \le \lambda_{\max}(S)\,\|\,\boldsymbol{x}_c(t)\,\|^2 < 0,$$

其中 $\lambda_{\max}(S)$表示矩阵 S 的最大特征值. 因此若取 $\alpha=-\lambda_{\max}(S)>0$，则定义中的不等式(8)成立,定理得证.

定义

$$\begin{aligned}&\hat{H}_1=[H_1\quad A_{11}\quad H_d],\quad \hat{H}_2=[H_2\quad 0\quad 0],\\&\hat{E}_1=\left[E_1^T\quad \frac{1}{\sqrt{1-\rho}}A_{12}^T\quad \frac{1}{\sqrt{1-\rho}}E_d^T\right]^T,\quad \hat{E}_2=[E_2^T\quad 0\quad 0]^T.\end{aligned}\tag{14}$$

则矩阵不等式(11)可以被写成

$$PA+A^TP+P\begin{bmatrix}\hat{H}_1\\B_c\hat{H}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{H}_1\\B_c\hat{H}_2\end{bmatrix}^TP+[\hat{E}_1\quad \hat{E}_2C_c]^T[\hat{E}_1\quad \hat{E}_2C_c]<0.\tag{15}$$

进一步定义辅助系统

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_0\boldsymbol{x}(t)+\hat{H}_1\boldsymbol{w}(t)+B_0\boldsymbol{u}(t),\qquad \boldsymbol{z}(t)=\hat{E}_1\boldsymbol{x}(t)+\hat{E}_2\boldsymbol{u}(t),\\&\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+\hat{H}_2\boldsymbol{w}(t)+D\boldsymbol{u}(t),\end{aligned}\tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 是状态向量，$\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{R}^m$ 是控制输入，$\boldsymbol{w}(t)\in\boldsymbol{R}^{2i+r}$是外部输入，$\boldsymbol{y}(t)\in\boldsymbol{R}^p$ 是测量输出，$\boldsymbol{z}(t)\in\boldsymbol{R}^{2j+r}$是被调输出，$A_0,B_0,C,D$ 是由系统(1)给出的常数矩阵，$\hat{H}_1,\hat{H}_2$，$\hat{E}_1$，$\hat{E}_2$ 由(14)中的关系式给定.

定理 2. 考虑不确定时滞系统(1—4),若存在一个输出动态反馈控制器(5),使得系统(16)在控制律(5)下所导出的闭环系统是稳定的,且从 $\boldsymbol{w}(t)$到 $\boldsymbol{z}(t)$的传递函数的 H_∞范数小于 1,则该控制器也是系统(1—4)的一个稳定化输出动态反馈控制器.

证明 . 系统(16)在控制律(5)作用下的闭环系统是

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_0 & B_0C_c\\B_cC & A_c+B_cDC_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\\boldsymbol{\xi}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{H}_1\\B_c\hat{H}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{w}(t),\\&\boldsymbol{z}(t)=[\hat{E}_1\quad \hat{E}_2C_C]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\\boldsymbol{\xi}(t)\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{17}$$

根据文献[9]中的引理 2.2,系统(17)稳定且

$$\left\|[\hat{E}_1\quad \hat{E}_2C_c]\left(sI-\begin{bmatrix}A_0 & B_0C_c\\B_cC & A_c+B_cDC_c\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\hat{H}_1\\B_c\hat{H}_2\end{bmatrix}\right\|_\infty<1\tag{18}$$

的充分必要条件是存在一个正定矩阵 P,使得矩阵不等式(15)成立,从而根据定理 1 知,控制器(5)是系统(1—4)的一个稳定化控制器.

注 1. 定理 2 证明了用一个输出动态反馈控制器镇定不确定时滞系统(1—4)的问题被转化成了一个不带任何不确定参数的线性定常系统的 H_∞控制问题. 因此,可以用标准 H_∞控制问题的求解方法[10—11]求解不确定时滞系统的输出反馈镇定问题.

注 2. 尽管本文只考虑一块的不确定性(4)，然而，对于块对角不确定性，可以采用文献[12]中的方法，通过一些简单的矩阵代数运算将其转化成一块不确定性的情形，从而应用本文提出的方法解决.

4 结论

本文研究了不确定时滞系统的输出反馈镇定问题,所考虑的系统具有时变参数不确

定性和时变状态滞后，证明了这一问题可以转化成一个线性时不变系统的 H_∞ 控制问题，从而可以应用现有的标准 H_∞ 控制问题求解方法得到这一类不确定时滞系统的稳定化输出动态反馈鲁棒控制器的设计方法.

参　考　文　献

1 俞　立. 不确定线性时滞系统的稳定化控制器设计. 控制理论与应用，1991，**8**(1)：68—73

2 Shen J C, Chen B S, Kung F C. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, **AC-36**: 638—640

3 Phoojaruenchanachai S, Furuta K. Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, **AC-37**: 1022—1026

4 Yu Li, Chu Jian, Su Hongye. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Automatica*, 1996, **32**(12): 1759—1762

5 Choi H H, Chung M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls. *Automatica*, 1995, **31**(9): 1349—1351

6 褚健. 时滞离散系统控制算法及其在长形工业电阻炉中的应用. 控制理论与应用，1995，**12**(1)：70—75

7 朱晓东，孙优贤. 不确定动态时滞系统的基于观察器的鲁棒镇定设计. 控制理论与应用，1996，**13**(2)：254—258

8 Burton T A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. New York: Academic, 1985

9 Zhou K, Khargonekar P P. An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization. *Syst. Control Lett.*, 1988, **11**: 85—91

10 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, Francis B A. State-space solutions to the standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, **AC-34**(8): 831—847

11 Sampei M, Mita T, Nakamichi M. An algebraic approach to H_∞ output feedback control problems. *Syst. Control Lett.*, 1990, **14**: 13—24

12 Fu M, Xie L, de Souza C E. H_∞ control for linear systems with time-varying parameter uncertainty, In: Control of Uncertain Systems, Ed. by Bhattacharyya S P, Keel L H, San Antonio CRC-Press, 63—75

DESIGN OF OUTPUT FEEDBACK STABILIZING CONTROLLERS FOR UNCERTAIN TIME—DELAY SYSTEMS

YU Li　　WANG Wanliang

(*College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310014)

CHU Jian

(*Institute of Industrial Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract This paper is concerned with the robust stabilization problem via output feedback for a class of time-delay systems with time-varying parametric uncertainty. It is shown that such a problem can be converted into an H_∞ control problem of a certain linear time-invariant system without any uncertainties, so the existing techniques solving H_∞ control problem can be used to a stabilizing output feedback controller of the considered system.

Key words Robust control, output feedback, uncertain systems, delay