第21卷 第2期 自动化学报 Vol. 21, No. 2
1995年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1995

短文

不可"修复如新"的两相依部件的并联系统的可靠性分析1)

吴少敏 万德钧 黄仁
(东南大学仪器系 南京 210018)

摘 要

研究了两相依部件的并联可修系统,在部件的故障分布服从二维指数分布、两个维修分布为一般分布、且故障部件不能"修复如新的假设下,利用几何过程和补充变量法求出了该系统的主要可靠性指标.

关键词: 几何过程,补充变量法,可靠性.

1 引言

两个相依部件组成的并联系统已由人们研究过,程侃[1]改正了 Harris[2] 的错误,在故障部件可"修复如新"的前提下,利用马氏过程研究了该系统.但故障部件并不总是可"修复如新"的,例如,随着修理次数的增加,机器的每次工作时间越来越短,而由于机器老化和磨损,其修理时间越来越长.本文基于这一事实,利用几何过程[3]及补充变量法,求出了系统的主要可靠性指标.文献[1]的某些结果是本文的特例.

定义1[3]. 设 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是相互独立的非负随机变量序列,X_n 的分布函数为 $F(a^{n-1}t)$,a 为正常数,$n=1,2,\cdots$,则称 $\{X_n(t), n=1,2,\cdots\}$ 为一个几何过程.显然,若 $a>1$,则 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是随机递减的.若 $0<a<1$,则 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是随机递增的.若 $a=1$,则几何过程 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一更新过程.

2 模型假设

假设1. 系统由两个相依部件并联而成,且每次故障后不能"修复如新",部件 i 在第 n 个周期(从工作到故障,再从故障到修复为一周期)中的维修时间为 $Y_n^{(i)}$,$i=1,2$,部件1在第 n 周期,部件2在第 m 周期的寿命分别为 $X_n^{(1)}, X_m^{(2)}$,则

1) 国家教委博士点基金和国家自然科学基金项目

本文于1992年6月8日收到

$$P\{X_n^{(1)} > t_1, X_m^{(2)} > t_2\} = \exp\{1 - a_1^{n-1}\lambda_1 t_1 - a_2^{m-1}\lambda_2 t_2 - \lambda_{12}\max(t_1, t_2)\}.$$

$Y_n^{(i)}$ 的分布函数为

$$G_n^{(i)}(b_i^{n-1}t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t b_i^{n-1}u_i(b_i^{n-1}y)dy\right),\ a_i > 1, 0 < b_i < 1.$$

假设 2. 在部件1,2分别处在第 n,m 个周期时，在 Δt 时间内，1）当两个部件都正常时，分别以概率 $a_1^{n-1}\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$ 和 $a_2^{m-1}\lambda_2\Delta t + o(\Delta t)$ 引起部件 1,2 故障，以概率 $\lambda_{12}\Delta t + o(\Delta t)$ 引起两个部件同时故障，此时，分别以概率 p,q 选修部件 1,2. $p+q=1$. 2）当部件 1 已故障，以概率 $(a_2^{m-1}\lambda_2 + \lambda_{12})\Delta t + o(\Delta t)$ 引起部件 2 故障。3）当部件 2 已故障，则以概率 $(a_1^{n-1}\lambda_1 + \lambda_{12})\Delta t + o(\Delta t)$ 引起部件 1 故障。系统只配一个修理 2.

假设 **3.** 部件按先坏先修，修复后立即投入工作的原则进行工作和维修。修理时间与寿命独立。

假设 4. 在时刻 $t=0$，两个部件同时开始工作.

假设 5. 在时刻 $t=0$，两个部件都是新的.

3　模型描述

由模型假设知，$\{X_n^{(i)}, i = 1, 2, \cdots\}$ 为随机递减序列，表明部件的寿命越来越短，$\{Y_n^{(i)}, i = 1, 2, \cdots\}$ 为随机递增序列，表明部件的修理时间越来越长.

定义 2. 设 $N(t)$ 为系统在时刻 t 的状态，若 $N(t)=0$ 时，两个部件都在工作；$N(t)=1$ 时，部件 1 在修理，部件 2 在工作；$N(t)=2$ 时，部件 1 在工作，部件 2 在修理；$N(t)=3$ 时，部件 1 在修理，部件 2 在待修，$N(t)=4$ 时，部件 1 在待修，部件 2 在修理。引进补充变量，设 $I_i(t)$ 为部件 i 于时刻 t 的周期数，$Y_i(t)$ 为部件 i 已用去的修理时间(在第 $I_i(t)$ 周期)，$i=1,2$，则 $\{N(t), I_1(t), I_2(t), Y_1(t), Y_2(t)\}$ 构成一个高维 Markov 过程，其状态概率定义为

$$p_{0kj}(t) = P_r\{N(t) = 0, I_1(t) = k, I_2(t) = j\},$$
$$p_{ikj}(t,y)dy = P_r\{N(t) = i, I_1(t) = k, I_2(t) = j, y \leqslant Y_1(t) < y + dy\}, i = 1,3,$$
$$p_{lkj}(t,y)dy = P_r\{N(t) = l, I_1(t) = k, I_2(t) = j, y \leqslant Y_2(t) < y + dy\}, l = 24,$$

其中 $k,j = 1,2,\cdots$. $x,y > 0$. 分析得

$$\left[\frac{d}{dt} + a_1^{k-1}\lambda_1 + a_2^{j-1}\lambda_2 + \lambda_{12}\right] p_{0kj}(t) = \int_0^\infty p_{1\,k-1\,j}(t,y) b_1^{k-2}u_1(b_1^{k-2}y)dy + \int_0^\infty p_{2kj-1}(t,y) b_2^{j-2}u_2(b_2^{j-2}y)dy,\ (k,j \geqslant 2), \tag{1}$$

$$\left[\frac{d}{dt} + a_1^{k-1}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}\right] p_{0k1}(t) = \int_0^\infty p_{1k-11}(t,y) b_1^{k-2}u_1(b_1^{k-2}y)dy,\ (k \geqslant 2), \tag{2}$$

$$\left[\frac{d}{dt} + \lambda_1 + a_2^{j-1}\lambda_2 + \lambda_{12}\right] p_{01j}(t) = \int_0^\infty p_{11j-1}(t,y) b_2^{j-2}u_2(b_2^{j-2}y)dy,\ (j \geqslant 2), \tag{3}$$

$$\left[\frac{d}{dt} + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}\right] p_{011}(t) = \delta(t), \tag{4}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+b_1^{k-1}u_1(b_1^{k-1}y)+a_2^{j-1}\lambda_2+\lambda_{12}\right]p_{1kj}(t,y)=0, \tag{5}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+a_1^{k-1}\lambda_1+b_2^{j-1}u_2(b_2^{j-1}y)+\lambda_{12}\right]p_{2kj}(t,y)=0, \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+b_1^{k-1}u_1(b_1^{k-1}y)\right]p_{3kj}(t,y)=(a_2^{j-1}\lambda_2+\lambda_{12})p_{1kj}(t,y), \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+b_2^{j-1}u_2(b_2^{j-1}y)\right]p_{4kj}(t,y)=(a_1^{k-1}\lambda_1+\lambda_{12})p_{2kj}(t,y), \tag{8}$$

$$p_{1kj}(t,0)=p_{0kj}(t)a_1^{k-1}\lambda_1+\int_0^\infty p_{4kj-1}(t,y)b_2^{j-2}u_2(b_2^{j-2}y)\mathrm{d}y,\ (j\geqslant 2), \tag{9}$$

$$p_{1k1}(t,0)=p_{0k1}(t)\cdot a_1^{k-1}\lambda_1, \tag{10}$$

$$p_{2kj}(t,0)=p_{0kj}(t)\cdot a_2^{j-1}\lambda_2+\int_0^\infty p_{3k-1j}(t,y)b_1^{k-2}u_1(b_1^{k-2}y)\mathrm{d}y,\ (k\geqslant 2), \tag{11}$$

$$p_{21j}(t,0)=p_{01j}(t)\cdot a_2^{j-1}\lambda_2, \tag{12}$$

$$p_{3kj}(t,0)=p_{0kj}(t)\cdot\lambda_{12}p, \tag{13}$$

$$p_{4kj}(t,0)=p_{0kj}(t)\cdot\lambda_{12}q, \tag{14}$$

$$p_{0kj}(0)=0,p_{ikj}(0,y)=0,i=1,2,3,4. \tag{15}$$

对方程(4),考虑 $[t,t+\Delta t)$ 内状态的转移情况

$$p_{011}(t+\Delta t)=p_{011}(t)[1-(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t]+\delta(t)\Delta t+o(\Delta t),$$

上式右边第一项表示没有发生状态转移,第二项体现模型假设 5,第三项表示由其它状态转移而来。上式两边除以 Δt,且令 $\Delta t\to 0$ 便得(4)式,

对方程(5),考虑 $[t,t+\Delta t)$ 内状态的转移情况,

$$p_{1kj}(t+\Delta t,y+\Delta t)=p_{1kj}(t,y)[1-(b_1^{k-1}u_1(b_1^{k-1}y)+a_2^{j-1}\lambda_2+\lambda_{12})\Delta t]+o(\Delta t),$$

上式右边第一项表示没有发生状态转移(由 $p_{1kj}(t,y)$ 的定义 $y>0$ 知,状态 1 不能由其它状态转移而来)。

(9)式考虑状态 1 的边界情形,

$$p_{1kj}(t+\Delta t,0)\Delta t=p_{0kj}(t)\cdot a_1^{k-1}\lambda_1\Delta t+\int_0^\infty p_{4kj-1}(t,y)b_2^{j-2}u_2(b_2^{j-2}y)\mathrm{d}y\Delta t+o(\Delta t),$$

上式右边第一、二项分别表示状态 1 由状态 0,4 转移而来,此时部件 1 的修理时间为零。$p_{4kj-1}(t,y)$ 项表示转移到状态 1 时部件 2 已修复,因此部件 2 进入下一周期 j。记

$$p_{0kj}^*(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}p_{0kj}(t)\mathrm{d}t,p_{ikj}^*(s,y)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}p_{ikj}(t,y)\mathrm{d}t,i=1,2,3,4.$$

$$\bar{G}_k^{(i)}(y)=1-G_k^{(i)}(y),\quad g_k^{(i)}(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sy}\mathrm{d}G_k^{(i)}(y),\ i=1,2.$$

对等式(1)—(14)两边进行 Laplace 变换,得

$$p_{0kj}^*(s)=\frac{C_{1k-1j}g_{k-1}^{(1)}(s+a_2^{j-1}\lambda_2+\lambda_{12})+C_{2kj-1}g_{j-1}^{(2)}(s+\lambda_{12}+a_1^{k-1}\lambda_1)}{s+a_1^{k-1}\lambda_1+a_2^{j-1}\lambda_2+\lambda_{12}},\ (k,j\geqslant 2), \tag{16}$$

$$p_{01j}^*(s)=\frac{1}{s+\lambda_1+a_2^{j-1}\lambda_2+\lambda_{12}}C_{21j-1}g_{j-1}^{(2)}(s+\lambda_{12}+\lambda_1),\ (j\geqslant 2), \tag{17}$$

$$p_{0k1}^*(s) = \frac{1}{s + a_1^{k-1}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}} C_{1k-11} g_{k-1}^{(1)}(s + \lambda_{12} + \lambda_2),\ (k \geqslant 2), \tag{18}$$

$$p_{011}^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}, \tag{19}$$

$$p_{1kj}^*(s) = C_{1kj} \cdot \bar{G}_k^{(1)}(y) e^{-sy - \lambda_{12}y - a_2^{j-1}\lambda_2 y}, \tag{20}$$

$$p_{2kj}^*(s) = C_{2kj} \bar{G}_j^{(2)}(y) e^{-sy - \lambda_{12}y - a_1^{k-1}\lambda_1 y}, \tag{21}$$

$$p_{3kj}^*(s) = [C_{3kj} e^{-sy} - C_{1kj} e^{-sy - \lambda_{12}y - a_2^{j-1}\lambda_2 y}] \bar{G}_k^{(1)}(y), \tag{22}$$

$$p_{4kj}^*(s) = [C_{4kj} e^{-sy} - C_{2kj} e^{-sy - \lambda_{12}y - a_1^{k-1}\lambda_1 y}] \bar{G}_j^{(2)}(y), \tag{23}$$

其中 $C_{ikj}, i = 1,2,3,4$ 满足下列等式:

$$C_{1k1} = p_{0k1}^*(s) \cdot a_1^{k-1}\lambda_1,\quad C_{21j} = p_{01j}^*(s) \cdot a_2^{j-1}\lambda_2,$$

$$C_{1kj} = p_{0kj}^*(s) \cdot a_1^{k-1}\lambda_1 + C_{4kj-1} g_{j-1}^{(2)}(s) - C_{2kj-1} g_{j-1}^{(2)}(s + \lambda_{12} + a_1^{k-1}\lambda_1),\quad j \geqslant 2,$$

$$C_{2kj} = p_{0kj}^*(s) \cdot a_2^{j-1}\lambda_2 + C_{3k-1j} g_{k-1}^{(1)}(s) - C_{1k-1j} g_{k-1}^{(1)}(s + \lambda_{12} + a_2^{j-1}\lambda_2),\quad k \geqslant 2,$$

$$C_{3kj} = C_{1kj} + p_{0kj}^*(s) \cdot \lambda_{12} p,\quad C_{4kj} = C_{2kj} + p_{0kj}^*(s) \cdot \lambda_{12} q.$$

上述 $C_{ikj}, i = 1,2,3,4$ 可以由实际数据用计算机解得。

4 可靠性指标

4.1 系统的可用度

记 $A(t)$ 为系统在时刻 t 的瞬时可用度，根据文献[4]，可得其 Laplace 变换式为

$$\begin{aligned}
A^*(s) &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \left[p_{0kj}^*(s) + \int_0^{\infty} p_{1kj}^*(s,y) dy + \int_0^{\infty} p_{2kj}^*(s,y) dy \right] \\
&= \sum_{j,k=2}^{\infty} \left\{ \frac{C_{1k-1j} g_{k-1}^{(1)}(s + a_2^{j-1}\lambda_2 + \lambda_{12}) + C_{2kj-1} g_{j-1}^{(2)}(s + \lambda_{12} + a_1^{k-1}\lambda_1)}{s + a_1^{k-1}\lambda_1 + a_2^{j-1}\lambda_2 + \lambda_{12}} \right\} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_{1k-11} g_{k-1}^{(1)}(s + \lambda_{12} + \lambda_2)}{s + a_1^{k-1}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{C_{11j-1} g_{j-1}^{(2)}(s + \lambda_{12} + \lambda_1)}{s + \lambda_1 + a_2^{j-1}\lambda_2 + \lambda_{12}} \\
&\quad + \sum_{j,k=1}^{\infty} \left[C_{1kj} \frac{1 - g_k^{(1)}(s + \lambda_{12} + a_2^{j-1}\lambda_2)}{s + \lambda_{12} + a_2^{j-1}\lambda_2} \right. \\
&\quad \left. + C_{2kj} \frac{1 - g_j^{(2)}(s + \lambda_{12} + a_1^{k-1}\lambda_1)}{s + \lambda_{12} + a_1^{k-1}\lambda_1} \right] + \frac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

4.2 系统的故障频度

设 $W_f(t)$ 为系统的瞬时故障频度，根据文献[4]，可得其 Laplace 变换为

$$\begin{aligned}
W_f^*(s) &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} p_{1kj}^*(s,y)(a_2^{j-1}\lambda_2 + \lambda_{12}) dy + \int_0^{\infty} p_{2kj}^*(s,y)(a_1^{k-1}\lambda_1 + \lambda_{12}) dy \right] \\
&= \sum_{j,k=1}^{\infty} \left[\frac{1 - g_k^{(1)}(s + \lambda_{12} + a_2^{j-1}\lambda_2)}{s + \lambda_{12} + a_2^{j-1}\lambda_2} C_{1kj}(a_2^{j-1}\lambda_2 + \lambda_{12}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 - g_j^{(2)}(s + \lambda_{12} + a_1^{k-1}\lambda_1)}{s + \lambda_{12} + a_1^{k-1}\lambda_1} \cdot C_{2kj}(a_1^{k-1}\lambda_1 + \lambda_{12}) \right].
\end{aligned} \tag{25}$$

4.3 系统的可靠度

令状态 $(3,y),(4,y)$ 为吸收状态，则模型描述中有关方程的 $p_{3kj}(t,y),p_{4kj}(t,y)$ 全可删掉. 于是，系统的可靠度(为区别起见、记 $p_{0kj}\triangleq q_{0kj}(t),p_{ikj}(t,y)\triangleq q_{ikj}(t,y)$, $i=1,2$)为

$$R(t)=\sum_{j,k=1}^{\infty}\left[q_{0kj}(t)+\int_0^{\infty}(q_{1kj}(t,y)+q_{2kj}(t,y))\mathrm{d}y\right].$$

对上式两边取 Laplace 变换，得

$$\begin{aligned}R^*(s)&=\sum_{j,k=1}^{\infty}\left[q_{0kj}^*(s)+\int_0^{\infty}(q_{1kj}^*(s,y)+q_{2kj}^*(s,y))\mathrm{d}y\right]\\&=\sum_{j,k=1}^{\infty}\left\{q_{0kj}^*(s)\left[1+\frac{a_1^{k-1}\lambda_1\cdot(1-g_k^{(1)}(s+\lambda_{12}+a_2^{j-1}\lambda_2))}{s+\lambda_{12}+a_2^{j-1}\lambda_2}\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\frac{a_2^{j-1}\lambda_2(1-g_j^{(2)}(s+\lambda_{12}+a_1^{k-1}\lambda_1))}{s+\lambda_{12}+a_1^{k-1}\lambda_1}\right]\right\},\end{aligned}\tag{26}$$

其中 $q_{0kj}^*(s)=p_{0kj}^*(s)$，而 $p_{0kj}^*(s)$ 已由(16)—(19)式给出.

5 讨论

本文的工作是在 $a_i>1,0<b_i<1$，$(i=1,2)$ 下进行的. 若取 $a_i=b_i=1$，由定义 1 知，$\{X_n^{(i)},n=1,2,\cdots\}$ 和 $\{Y_n^{(i)},n=1,2,\cdots\},i=1,2$，为更新过程. 从而部件的周期数便失去意义. 于是方程(1)变为

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}\right]p_0(t)=\int_0^{\infty}\left[p_0(t,y)u_1(y)+p_2(t,y)u_2(y)\right]\mathrm{d}y+\delta(t),\tag{27}$$

以文献[1]中的(16)式为例，说明文献[1]的结果是本文结果的特例. 记 $\tilde{\lambda}_1=\lambda_1+\lambda_{12}$，$\tilde{\lambda}_2=\lambda_2+\lambda_{12}$，$\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$，$g_1(\cdot)=g_1^{(1)}(\cdot)$，$g_2(\cdot)=g_1^{(2)}(\cdot)$，由(27)式可得(联立 $C_1=p_0^*(s)\cdot\lambda_1$ 及 $C_2=p_0^*(s)\cdot\lambda_2$).

$$\begin{aligned}p_0^*(s)&=\frac{1}{s+\lambda}[C_1g_1(s+\tilde{\lambda}_2)+C_2g_2(s+\tilde{\lambda}_1)]+\frac{1}{s+\lambda}\\&=\frac{1}{s+\lambda-\lambda_1g_1(s+\tilde{\lambda}_2)-\lambda_2g_2(s+\tilde{\lambda}_1)},\end{aligned}\tag{28}$$

用(28)式代换(26)式中的 $q_{0kj}^*(s)$，且令 $a_i=b_i=1,i=1,2$，得

$$R^*(s)=p_0^*(s)\left[1+\lambda_1\frac{1-g_1(s+\tilde{\lambda}_2)}{s+\tilde{\lambda}_2}+\lambda_2\frac{1-g_2(s+\tilde{\lambda}_1)}{s+\tilde{\lambda}_1}\right].\tag{29}$$

于是，首次故障前平均时间为

$$MTTFF=\int_0^{\infty}R(t)\mathrm{d}t=\lim_{s\to 0}R^*(s)=\frac{1+\frac{\lambda_1}{\tilde{\lambda}_2}[1-g_1(\tilde{\lambda}_2)]+\frac{\lambda_2}{\tilde{\lambda}_1}[1-g_2(\tilde{\lambda}_1)]}{\lambda_{12}+\lambda_1[1-g_1(\tilde{\lambda}_2)]+\lambda_2[1-g_2(\tilde{\lambda}_1)]}.$$

上式即为文献[1]中的(16)式. 同理，本文的结果是文献[1]中相应结果的推广.

参　考　文　献

[1] 程侃．两相依部件的系统可靠性分析，数学进展，1989，**11**(3)：206—215．

[2] Harris R. Reliability Applications of A Bivariate Exponential Distribution. OR, 1968,**16**(1):18—27.

[3] Lam Yeh. Geometric Processes and Replacement Problem. *Adv. Appl. Prob*, 1988, **20**(2):479—482.

[4] 史定华．计算可修系统在(0,t)中平均故障次数的新方法．应用数学学报，1985，**8**(1)：101—110．

RELIABILITY ANALYSIS OF A TWO-DEPENDENT-UNIT SYSTEM WITHOUT BEING REPAIRED "AS POSSIBLE AS NEW"

Wu Shaomin　Wan Dejun　Huang Ren

(Dept. of Instrument Science & Engineering Southeast Univarsity Nanjing 210018)

Abstract

This paper considers a two-depandent-unit system in which the life distributions of the two units are assumed to be a two-dimensional exponential distribution, and the repair distributions to be general distributions. Under this assumption, the failure units can not be repaired "as possible as new", by using geometric process and method of supplementary variable, some reliability indices are derived.

Key words: Geometric process; method of supplementary; raliability.