第25卷 第3期
1999年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 3
May, 1999

短文

# 不确定内联系统的二次稳定性和分散反馈镇定[1)]

王向东 高立群 张嗣瀛
(东北大学自动控制系 沈阳 110006)

**摘 要** 文中首先讨论了系统 $\dot{x}(t)=\left\{A_0+\sum_{i=1}^{K}D_iF_i(t)E_i\right\}x(t)$ 的二次稳定性，给出以 $H_\infty$ 小增益条件表示的该系统是二次稳定的充分必要条件. 然后讨论了一类不确定内联系统的二次稳定性和分散反馈镇定问题，给出用"集结"后的子系统的一组 $H_\infty$ 小增益条件表示的不确定内联系统二次稳定和可分散反馈镇定的充分条件. 分散控制可通过求一组子系统阶数的 Riccati 不等式得到.

**关键词** 不确定系统，$H_\infty$ 模，二次稳定，分散反馈镇定.

# QUADRATIC STABILITY AND DECENTRALIZED STABILIZATION VIA STATE FEEDBACK FOR UNCERTAIN INTERCONNECTED SYSTEMS

WANG Xiangdong GAO Liqun ZHANG Siying
(*Northeastern University*, *Shenyang* 110006)

**Abstract** In this paper, the quadratic stability for uncertain system $\dot{x}(t)=\left\{A_0+\sum_{i=1}^{K}D_iF_i(t)E_i\right\}x(t)$ is explored and the sufficient and necessary condition discribed by $H_\infty$ small gain condition is given. Then, the problem of quadratic stability and decentralized stabilizability for uncertain interconnected systems is discussed. Two groups of necessary and sufficient conditions for quadratic stability and decentralized stabilization of the uncertain interconnected system have been obtianed, which are $H_\infty$ small gain conditions for subsystems. The decentralized controllers can be obtained by solving a group of Riccati inequalities on subsystems.

1)国家自然科学基金、国家教委博士点基金和辽宁省自然科学基金资助课题.
收稿日期 1997-05-12 收修改稿日期 1997-11-24

**Key words** Uncertainty, $H_\infty$ norm, quadratic stability, decentralized stabilization.

## 1 引言

已有大量文章(见文[1－6])讨论了不确定线性系统的二次稳定性及镇定问题,并得到许多深刻的结论,如文[1,2]中的 $H_\infty$小增益条件. 但在应用中随着系统中不确定性部分项数的增多(这种增多或许由于对不确定性有更好的了解,或由于不确定性很复杂),所需检验其 $H_\infty$范数的矩阵的阶数会迅速增加,这不应该是系统所固有的特点. 另一方面,过去对组合系统的研究有了十分丰富的结果,当在系统中含有不确定性时,许多深刻的结果(像以分散固定模表示的可分散反馈镇定条件)不能有效地处理这些不确定性而失去作用. 而关于不确定组合系统的分散反馈镇定所采用的方法基本上是基于集中控制的方法而得到的,部分地失去了大系统方法的特点. 在本文中我们所给出的关于不确定线性系统是二次稳定的充分必要条件,同样也是 $H_\infty$小增益条件,但通过"集结"思想,已克服了文[1,2]中结果的缺点,便于应用. 更主要地,基于所给出的结果我们讨论了非常广泛的一类不确定内联系统的二次稳定性,得到了用刻划一组低阶子系统的稳定性的 $H_\infty$小增益条件表示的该内联系统是二次稳定的充分条件,这样可以把不确定内联系统的分散反馈镇定问题变成一组子系统的反馈镇定问题,即分散控制律完全可以分散设计.

## 2 已知结果和引理

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\left\{A_0+\sum_{i=1}^{K}D_iF_i(t)E_i\right\}\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态,$\boldsymbol{u}\in R^m$,$A_0\in R^{n\times n}$,$D_i\in R^{n\times p}$,$F_i(t)\in R^{p\times q}$,$E_i\in R^{q\times n}$,$B\in R^{n\times m}$,$D_i$,$E_i$ 是常阵,$F_i(t)$是不确定性参数阵,其元素是在某一紧集 $\Omega$ 上取值的 Lebesgue 可测函数且满足 $\sum_{i=1}^{K}F_i^{\mathrm T}F_i\leqslant I$. 考虑系统的二次稳定性和可二次镇定(定义见文[1,5])问题.

对于系统(1)($\boldsymbol{u}=0$),令 $D_0=(D_1D_2\cdots D_K)$,$E_0^{\mathrm T}=(E_1^{\mathrm T}E_2^{\mathrm T}\cdots E_K^{\mathrm T})$和 $F(t)=$ block-diag $(F_1(t)\cdots F_K(t))$,则系统可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A_0+D_0F(t)E_0)\boldsymbol{x}(t). \tag{2}$$

文[1]中关于系统(2)的二次稳定性给出了如下结论(文[1]中定理2.7).

**定理1.** 系统(2)是二次稳定的当且仅当下面条件成立:

1) $A_0$是稳定阵;

2) $\|E_0(sI-A_0)^{-1}D_0\|_\infty<1$.

文[2]对于类似的系统以 Frobenius 模来刻划不确定性界时给出了同样的结论(文[2]中推论2和3). 由于上述 $D_0$,$E_0$的形式,当 $K$ 增大时,矩阵 $E_0(sI-A_0)^{-1}D_0$的阶数随之增大,不论用何种方法,计算其 $H_\infty$模会越来越困难. 实际上我们利用文[6]中定义2.1及引理2.1不难证明下面定理来避免这种困难.

**定理2.** 令 $D\in R^{n\times n}$，使 $DD^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{K}D_iD_i^{\mathrm{T}}$，令 $E\in R^{n\times n}$ 使 $E^{\mathrm{T}}E=\sum_{i=1}^{K}E_i^{\mathrm{T}}E_i$，则系统(2)是二次稳定的充分必要条件是下面条件成立：

1) $A_0$是稳定阵；

2) $\|E(sI-A_0)^{-1}D\|_\infty<1$.

显然 $E,D$ 从而 $E(sI-A_0)^{-1}D$ 的阶数不随 $K$ 变化. 利用这一结论可给出下面主要结果.

# 3　主要结果

考虑不确定内联系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A+H(t)]\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t),\tag{3}$$

其中

$$A=\text{block-diag}(A_1\cdots A_N),$$
$$B=\text{block-diag}(B_1\cdots B_N),$$
$$H(t)=\begin{bmatrix}H_{11}(t) & H_{12}(t) & \cdots & H_{1N}(t)\\ H_{21}(t) & H_{22}(t) & \cdots & H_{2N}(t)\\ & \cdots & \cdots & \\ H_{N1}(t) & H_{N2}(t) & \cdots & H_{NN}(t)\end{bmatrix},$$

$A_i\in R^{n\times n}$, $B_i\in R^{n\times m}$, $H_{ij}(t)\in R^{n\times n}$，其元素是在某紧集上取值的 Lebseque 可测函数，$i,j=1,2,\cdots,N$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=(x_1^{\mathrm{T}}\cdots x_N^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)=(\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{u}_N^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{x}_i\in R^n$, $\boldsymbol{u}_i\in R^m$, $i=1,2,\cdots,N$. 之所以这样假定系统的内联项是因为许多实际的大系统（如电力系统）中子系统之间的互联项的确是未知的（见文[7]）. 而有些大系统我们仅知道 $H_{ij}$中的某些原素不为零，有些原素取零值，其它情况不详. 因此，式(3)表示了非常一般的一类系统.

今考虑内联系统的二次稳定性问题和分散反馈二次镇定问题. 设 $g(t)$是任一互联项，令 $g(t)=DF(t)E$，其中 $D,E$ 是常阵. 实际上，因任一 $n\times n$ 阵总可以分解成不超过 $n^2$ 个秩为1的阵之和，而任一秩为1的阵可以分解成两向量之积. 于是任一 $g(t)$总可以写成若干个这样 $DF(t)E$ 的和. 为方便计设 $g(t)=DF(t)E$，令$((M)_{ij})$表示一个 $N\times N$ 分块阵，仅在第 $i$ 行和第 $j$ 列交叉处是 $n\times n$ 的方阵 $M$，其余元素为 $n\times n$ 的零阵. 利用这样分解和分块阵记法，可有

$$\big((H_{ij}(t))_{ij}\big)=\big((D_{ij})_{ij}\big)\big((F_{ij}(t))_{jj}\big)\big((E_{ij})_{jj}\big),\quad i,j=1,2,\cdots,N.\tag{4}$$

于是系统(3)可记为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\Big(A+\sum_{i,j=1}^{N}\big((D_{ij})_{ij}\big)\big((F_{ij}(t))_{jj}\big)\big((E_{ij})_{jj}\big)\Big)\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t),\tag{5}$$

经计算有

$$\sum_{i,j=1}^{N}\big((D_{ij})_{ij}\big)\big((D_{ij})_{ij}\big)^{\mathrm{T}}=\text{block-diag}\Big(\sum_{j=1}^{N}D_{1j}D_{1j}^{\mathrm{T}}\cdots\sum_{j=1}^{N}D_{Nj}D_{Nj}^{\mathrm{T}}\Big),\tag{6}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N}\big((E_{ij})_{jj}\big)^{\mathrm{T}}\big((E_{ij})_{jj}\big)=\text{block-diag}\Big(\sum_{i=1}^{N}E_{i1}^{\mathrm{T}}E_{i1}\cdots\sum_{i=1}^{N}E_{iN}^{\mathrm{T}}E_{iN}\Big),\tag{7}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N}((F_{ij}(t))_{jj})^{\mathrm{T}}((F_{ij}(t))_{jj}) = \text{block-diag}\left(\sum_{i=1}^{N}F_{i1}^{\mathrm{T}}(t)F_{i1}(t)\cdots\sum_{i=1}^{N}F_{iN}^{\mathrm{T}}(t)F_{iN}(t)\right). \quad (8)$$

令 $D_i\in R^{n\times n}$，使 $D_iD_i^{\mathrm{T}}=\sum_{j=1}^{N}D_{ij}D_{ij}^{\mathrm{T}}, i=1,2,\cdots,N$；令 $D\in R^{nN\times nN}$，使 $DD^{\mathrm{T}}=\sum_{i,j=1}^{N}((D_{ij})_{ij})\cdot((D_{ij})_{ij})^{\mathrm{T}}$，由式(6)有 $D=\text{block-diag}(D_1\cdots D_N)$；令 $E_j\in R^{n\times n}$，使 $E_j^{\mathrm{T}}E_j=\sum_{j=1}^{N}E_{ij}^{\mathrm{T}}E_{jj}$，$j=1,2,\cdots,N$；令 $E\in R^{nN\times nN}$，使 $E^{\mathrm{T}}E=\sum_{i,j=1}^{N}((E_{ij})_{jj})^{\mathrm{T}}((E_{ij})_{jj})$. 由式(7)有 $E=\text{block-diag}(E_1\cdots E_N)$，且由式(8)有 $\sum_{i,j=1}^{N}((F_{ij}(t))_{jj})^{\mathrm{T}}((F_{ij}(t))_{jj})\leqslant I_{nN}$ 等价于 $\sum_{i=1}^{N}F_{ij}^{\mathrm{T}}(t)F_{ij}(t)\leqslant I_n, j=1,2,\cdots,N$. 这样，可以给出如下定理.

**定理3.** 对于系统(3)($\boldsymbol{u}=0$)，若 $\sum_{i=1}^{N}F_{ij}^{\mathrm{T}}(t)F_{ij}(t)\leqslant I_n$，$j=1,2,\cdots,N$，则它是二次稳定的充分条件是下面条件成立：

1) $A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是稳定阵；

2) $\|E_i(sI-A_i)^{-1}D_i\|_\infty<1, i=1,2,\cdots,N$.

证明. 因 $A=\text{block-diag}(A_1\cdots A_N)$，即 $A$ 是稳定阵等价于 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ 是稳定阵. 而 $E(sI-A)^{-1}D=\text{block-diag}(E_1(sI-A_i)^{-1}D_1\cdots E_N(sI-A_N)^{-1}D_N)$，从而不难证明 $\|E(sI-A)^{-1}D\|_\infty<1$ 等价于 $\|E_i(sI-A_i)^{-1}D_i\|_\infty<1(i=1,2,\cdots,N)$. 由定理条件知不确定性界的条件也满足，由定理2知所欲证明的结论是成立的.

下面考虑系统(3)的分散反馈二次镇定问题. 由定理3，我们有下面的结论.

**定理4.** 系统(3)可分散线性反馈二次镇定的充分条件是存在 $K_i, i=1,2,\cdots,N$，使下面条件成立：

1) $A_i-B_iK_i$ 是稳定阵；

2) $\|E_i(sI-A_i+B_iK_i)^{-1}D_i\|_\infty<1$，

其中 $E_i, D_i(i=1,2,\cdots,N)$ 如定理3中所定义.

通过定理4设计 $K_i$ 很不方便. 而 Raccati 方程(不等式)方法对于线性系统的控制是极重要的方法，下面利用 Riccati 不等式给出设计 $K_i$ 的方法.

**定理5.** 若存在 $\varepsilon_i>0$，$i=1,2,\cdots,N$，使 Riccati 不等式

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+P_i\left(D_iD_i^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\varepsilon_i}B_iB_i^{\mathrm{T}}\right)P_i+E_i^{\mathrm{T}}E_i<0 \quad (i=1,2,\cdots,N) \qquad (9)$$

有对称正定解 $P_i$. 令 $K_i=\frac{1}{2\varepsilon_i}B_i^{\mathrm{T}}P_i$，则分散反馈 $\boldsymbol{u}_i=-K_i\boldsymbol{x}_i(t), i=1,2,\cdots,N$，可二次镇定系统(3).

证明. 式(9)可以写成

$$(A_i-\frac{1}{2\varepsilon_i}B_iB_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\mathrm{T}}P_i+P_i(A_i-\frac{1}{2\varepsilon_i}B_iB_i^{\mathrm{T}}P_i)+P_iD_iD_i^{\mathrm{T}}P_i+E_i^{\mathrm{T}}E_i<0,$$

由文[6]中引理2.1，对于 $i=1,2,\cdots,N$ 上式等价于

1) $A_i-\frac{1}{2\varepsilon_i}B_iB_i^{\mathrm{T}}P_i$ 是稳定阵；

2) $\left\|E_i\left(sI-A_i+\frac{1}{2\varepsilon_i}B_iB_i^{\mathrm{T}}P_i\right)^{-1}D_i\right\|_\infty<1$ 成立，由定理4知，所欲证者成立.

## 4 结论

本文利用对不确定性部分重新"集结"的方法,讨论了一类线性不确定系统的二次稳定性和一类不确定内联系统的二次稳定性,推导出二次稳定的充分条件,特别是用低阶子系统表示的内联系统是二次稳定的充分条件;给出了以子系统表示的分散反馈可镇定的充分条件和分散反馈律的 Riccati 不等式.使之更便于应用的.

## 参 考 文 献


1 Khargonckar P P, Peterson I R *et al.* Robust stabilization of uncertain linear system: quadratic stabilizability and $H_\infty$ control theory. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990, **AC-35**(3):356-361

2 Lee J H, Kwon W H *et al.* Quadrtic stablity and stabilization of linear systems with Frobenius norm-boanded uncertain. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1996, **AC-41**(1):453-456

3 Peterson I R. Notions of stabilizability and contrallablity for a class of uncertain linear systems. *Int. J. Control*, 1987, **46**(2):409-422

4 Peterson I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *System & Control Letters*, 1987, **8**: 351-357

5 Barmish B R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain systems. *Journal of Optim. Theory and application*, 1985, **46**(4):399-408

6 Xie Lihua, Fu M *et al.* $H_\infty$ control and quadratic stabilization of systems with parameers uncertain via output feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, **37**(8):1253-1256

7 Jain S, Khorram F *et al.* Decentralized control of large-scale power systems with unknown interconnections. *Int. J. Control*, 1996, **63**(3):591-608



**王向东** 1959年出生,副教授.研究方向为复杂系统的结构与控制.

**高立群** 1949年出生,教授.研究方向为复杂系统的结构与控制、微分对策、系统辨识.

**张嗣瀛** 1925年出生,教授,中国科学院院士.研究方向为复杂系统的结构与控制.