

文章编号:1001-9081(2007)01-0050-02

一种 Lyapunov 指数算法及其实现

冯明库,丘水生,晋建秀

(华南理工大学 电子与信息学院,广东 广州 510640)

(fengmk@163.com)

摘要:提出了一种利用周期轨道不同权重计算 Lyapunov 指数的算法。对混沌序列的周期轨道进行统计,并计算不同的周期轨道的 Lyapunov 指数,依据周期轨道的权重加权求和得到整个混沌吸引子的平均 Lyapunov 指数。深入讨论了初始值等对平均 Lyapunov 指数的影响。该算法不用舍去开始迭代点,适用于复杂混沌系统。

关键词: Lyapunov 指数;周期轨道;混沌吸引子

中图分类号: O411.3 **文献标识码:** A

A calculation method of Lyapunov exponent and its realization

FENG Ming-ku, QIU Shui-sheng, JIN Jian-xiu

(College of Electronic & Information, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: An algorithm of Lyapunov exponent with different weights of periodic orbits was proposed. Periodic orbits of chaotic sequences were calculated statistically, then the Lyapunov exponents of different orbits were computed, and the mean Lyapunov exponent of chaotic attractor was got according to the weights of different periodic orbits. The effect of initial value on the mean Lyapunov exponent was discussed. The beginning iterative points do not need to abnegate, and the algorithm is applicable to complicated chaotic systems.

Key words: Lyapunov exponent; periodic orbits; chaotic attractors

0 引言

自 20 世纪 60 年代 Lorenz 发现混沌以来,混沌理论及其应用研究已成为当今学术研究的热点。作为混沌特征参量之一的 Lyapunov 指数,由于只要能判定系统的一个 Lyapunov 指数为正,就可以判定系统处于混沌状态,因此众多学者对 Lyapunov 指数的计算提出了不少算法。利用公式(1)^[1],对于简单一维映射,理论计算比较容易,因为它不依赖于初始值,但对于复杂混沌系统特别是不能用解析方程来表达的系统,此公式就显得无能为力,只能从混沌序列通过算法求得。Daniel 曾提出用最小二乘计算 Lyapunov 矩阵的本征值来计算 Lyapunov 指数^[2],然而此 Lyapunov 矩阵是由相空间局部线性化得到的,反映的是混沌吸引子局部的性质,并不能充分地判定整个混沌吸引子全貌。多数研究者采用 Wolf 法计算 Lyapunov 指数^[3-6],通常在计算前先将混沌序列的前 1000 点或 5000 点的值舍去,然后通过剩下的点计算。其实这仍难以保证第 1001 个点或 5001 点的值或其后的部分点已进入混沌吸引子的周期轨道。如果这些值不在吸引子轨道上,开始的一般过渡过程,作用在雅可比矩阵上,将对最终结果的收敛造成很大影响,从而使 Lyapunov 指数的计算结果出现偏差。

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \log |f'(x_i)| \quad (1)$$

本文根据混沌的周期轨道理论^[7,8],先由混沌序列计算混沌周期轨道,并将各周期轨道出现的概率作为权重,然后由 Lyapunov 指数公式通过算法实现 Lyapunov 指数的计算。由于这些周期轨道是混沌吸引子相空间的部分,并且是由所有

统计出的周期轨道计算 Lyapunov 指数,因而此算法得到的 Lyapunov 指数反映的是混沌吸引子的全貌,是轨道长期运动平均的结果。

1 混沌吸引子周期轨道统计

本文以 Chua's 电路方程为例对混沌吸引子周期轨道进行分类统计并计算 Lyapunov 指数。Chua's 电路方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = 6.3(y - x) - 9g(x) \\ \dot{y} = 0.7(x - y) + z \\ \dot{z} = -7y \end{cases} \quad (2)$$

$$g(x) = m_0x + 0.5(m_1 - m_0)(|x + B_p| - |x - B_p|)$$

其中: $m_0 = -0.5, m_1 = -0.8, B_p = 1$ 。

周期轨道算法原理:首先设定一个误差上限 ε ,考察相空间中的一个相点,由该点出发的相轨运动一段时间以后回到该点附近。若二者的距离小于设定的误差上限,则此两点之间的相轨可以近似地看作一个周期轨道。其具体算法如下:

(1) 计算混沌吸引子时间序列。本文在数值仿真中采用常用的四阶/五阶 Runge-Kutta 方法求解微分方程。

(2) 对时间序列进行归一化。

(3) 取 $\varepsilon = 0.005$,对于相点 x_i ,依次计算它与 x_{i+1}, x_{i+2}, \dots 之间的距离,直至找到一个 x_k ,使得 x_k 与 x_i 的距离 $\rho(x_k, x_i) < \varepsilon$,距离的定义为:

$$\begin{aligned} \rho(x_k, x_i) &= \|x_k - x_i\|_2 \\ &= \left[(x_k^{(1)} - x_i^{(1)})^2 + (x_k^{(2)} - x_i^{(2)})^2 + \dots \right]^{1/2} \end{aligned}$$

收稿日期:2006-07-06;修订日期:2006-09-23

作者简介:冯明库(1970-),男,山东新泰人,讲师,博士研究生,主要研究方向:混沌理论、保密通信;丘水生(1939-),男,广东梅县人,教授,博士生导师,主要研究方向:非线性系统、混沌保密通讯、功率电子学。

$$\left[(x_k^{(3)} - x_i^{(3)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

如果能找到这样的 x_k , 从 x_i 到 x_k 就是一个周期轨道; 如果 $k - i > 1000$ 时还未找到, 则跳出, 下一步去 x_{i+1} , 重新开始寻找。

(4) 依据上步的计算结果将周期轨道进行归类, 并统计各种不同周期轨道出现的概率 $p_m = \frac{n_m}{n_{\text{总}}}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)。其中 m 表示周期轨道的周期数, n_m 表示 m 周期轨道出现的次数, $n_{\text{总}}$ 表示所有的周期轨道出现的总次数。

(5) 画周期轨道概率分布图。

对于 Chua's 方程, 解微分方程确定 10000 点, 取 $\varepsilon = 0.005$, 步长 $h = 0.1$, 找到周期轨道(严格上应称为准闭轨)117 个, 最小的差值为 116, 是周期 1 轨道, 其他的为 116 的整数倍(非组合轨道)或两个加起来为 116 的整数倍(组合轨道), 对应的直方图如图 1 所示。横坐标为归一化周期, 纵坐标为各周期轨道出现的概率。从图 1 可看出, 周期 1、6、7 轨道出现的概率比其他轨道大些。每一条周期轨道邻域内的准周期闭轨数目与其分布的情况各不相同。

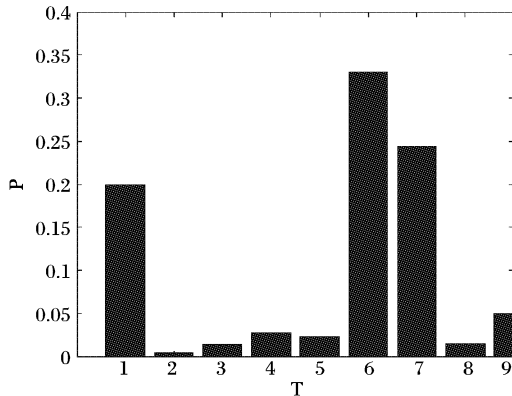


图 1 Chua's 电路周期轨道概率分布

表 1 初始值 $x(1) = 0.2, y(1) = 0.2, z(1) = 0.2$ 时的平均 Lyapunov 指数

ε	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	...	0.010
$\bar{\lambda}$	0.030 16	0.025 2	0.020 27	0.016 36	0.013 56	0.011 6	0.011 42	...	0.011 39

表 2 初始值 $x(1) = -1.5, y(1) = 1.0, z(1) = 21/20$ 时的平均 Lyapunov 指数

ε	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	...	0.010
$\bar{\lambda}$	0.006 6	0.013 00	0.011 32	0.011 13	0.011 34	0.011 74	0.011 63	...	0.011 54

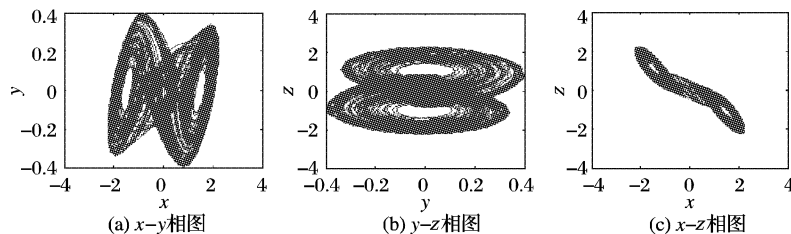


图 2 初始值 $x(1) = 0.2, y(1) = 0.2, z(1) = 0.2$ 时的混沌吸引子相图

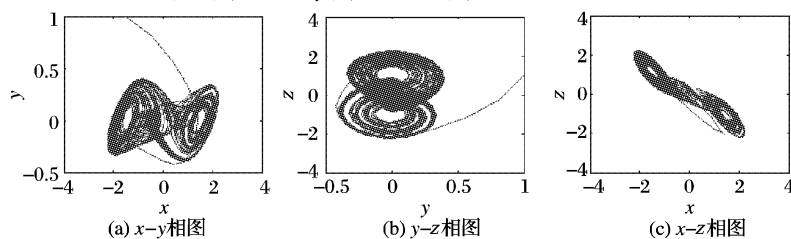


图 3 初始值 $x(1) = -1.5, y(1) = 1.0, z(1) = 21/20$ 时的混沌吸引子相图

2 Lyapunov 指数算法实现

Lyapunov 指数是系统呈现混沌态的重要特征参量之一, 它反映的是相空间中距离很近的两点, 在经过多次迭代或时间演化后, 两点轨线分离的程度^[9]。

Lyapunov 指数算法原理:

(1) 先设定误差上限和步长。如取 $\varepsilon = 0.005$, 步长 $h = 0.1$;

(2) 寻找各周期轨道及其概率 p_m , 其概率即为最后计算平均 Lyapunov 指数时各周期的权重;

(3) 计算每个周期 m 对应的 Lyapunov 指数 λ_{ki} 。每个周期 m 对应着 x_k 与 x_i , Lyapunov 指数计算公式为:

$$\lambda_{ki} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^m \log_2 \frac{x(k+l) - x(i+l)}{x(k) - x(i)}$$

其中: l 是在轨道上演化进行的次数;

(4) 计算第 m 周期对应的平均 Lyapunov 指数 λ_m 。对于 P_m 个第 m 周期, P_m 个 Lyapunov 指数求平均得到第 m 周期的 Lyapunov 指数 λ_m ;

(5) 依据不同周期的 Lyapunov 指数, 分别乘以各自的权重, 即为整个混沌吸引子的平均 Lyapunov 指数 $\bar{\lambda} = \sum \lambda_m p_m$;

(6) 改变误差上限或步长重复步骤(1) ~ (5)。

3 数值仿真分析

接下来, 我们讨论 Runge-kutta 法中误差上限、初始值的选择对 Lyapunov 指数的影响。对于单峰一维迭代映射, 初始值对 Lyapunov 指数的计算是没有影响的, 但对于复杂混沌系统或超混沌系统, 初始值有无影响? 我们以公式(1)的 Chua's 方程为例采用本文给出 Lyapunov 指数算法原理进行数值仿真, 得到数据结果如表 1 和表 2 所示。

其中: $I_k = \{i | 1 \leq i \leq c\}, D(x_k, p_i) = 0, \bar{I}_k = \{1, 2, \dots, c\} - I_k;$

步骤五:由 $\mu_{ik}, D(x_k, p_i), i = 1, 2, \dots, c$ 及式(11) 计算个体适应度函数的值。

在解码,适应度函数的构造之后,就可以用 GA 求解聚类问题了,但在此之前还要确定算子集 T 中算子的选取。在基于 GA 的聚类算法中我们对所有算子都选用,只不过赋予其不同的使用概率,使其按概率进行操作。

5 应用实例

本例实验样本的 10 个员工的定性指标如“态度表现”等分别由 5 名专家评价,定量指标如“针对岗位任务的表现”等则由我们的 HRM 系统得出,并经过标准化处理如表 2 所示。

表 2 标准化后的各个体参数值

样本	岗位表现			适应性表现		态度表现		...
	岗位任务	信任程度	知识利用	岗位适应性	责任感	出勤情况	...	
1	8.1	7.53	7.3	4.92	3.4	3.7	...	
2	7.62	5.4	4.02	4.0	3.11	3.8	...	
3	8.53	6.8	5.01	4.64	3.3	3.6	...	
4	7.3	7.62	7.34	5.3	3.5	3.9	...	
5	8.7	6.5	6.5	4.1	2.99	3.8	...	
6	8.01	6.7	7.39	5.22	3.86	4.0	...	
7	7.3	6.5	6.31	4.99	3.0	3.6	...	
8	8.35	7.03	7.1	5.3	3.64	4.0	...	
9	7.8	6.8	6.1	5.4	3.1	3.5	...	
10	8.9	7.81	7.49	5.48	3.58	4.0	...	

采用提出的新聚类算法,经过 9 次迭代,取种规模 $N = 10$, 变异概率 $P_m = 0.5$, 交叉概率 $P_c = 0.2$, 得到的聚类结果如表 3。

表 3 聚类结果

优秀	一般	较差
1, 4, 6, 8, 10	3, 5, 9	2, 4

表 4 2 种模糊聚类方法的比较

算法	迭代次数	准确率		
		类别 1	类别 2	类别 3
FCM	9	87%	85%	100%
本文方法	11	93%	95%	100%

6 结语

在上述过程中,遗传算法与传统的模糊聚类算法实际上在同时运行,因而基于这种增强型遗传算法的模糊聚类算法有机地把这两者结合起来了。另外,我们还把进化结束的准则与传统算法的终止准则有机地结合起来了。这样不仅提高了算法的聚类分析性能,也提高了算法的收敛速度。

参考文献:

[1] 陈国良,王煦法,庄镇泉,等. 遗传算法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社,2002.
 [2] 高新波. 模糊聚类分析及其应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社,2004.
 [3] 张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京: 科学出版社,2000.
 [4] 谢季坚,刘承平. 模糊数学方法及其应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社,2001.
 [5] 朱剑英. 智能系统非经典数学方法[M]. 武汉: 华中科技大学出版社,2001.

(上接第 51 页)

从表 1 和表 2 都可以看出,随着误差上限 ε 的增加,Chua's 电路系统的平均 Lyapunov 指数越接近于一不变值,这是很容易理解的。 ε 越大,计入的周期轨道数目越多,就越能反映混沌吸引子的全貌,从而计算的平均 Lyapunov 指数就越接近其实际值。

对照表 1 和表 2,不同的初始值,其平均 Lyapunov 指数的数值仿真最终结果接近。说明对于稍复杂的混沌系统,平均 Lyapunov 指数的计算与初始值没有关系,这也可以从吸引子相位图上得到解释。图 2 是在表 1 的初始值下得到的相位图,图 3 是在表 2 的初始值下得到的相位图。对比两图,图 2 的初始取值显然已在吸引子区域内,而图 3 的初始取值显然迭代开始时不在吸引子区域内,但也很快地进入吸引子的有限区域。不同的初始值,平均 Lyapunov 指数计算结果基本相同,从另一个侧面也说明此混沌系统在其混沌吸引子区内具有遍历性。

作为比较,采用本文的算法对 Henon 吸引子的 Lyapunov 指数进行了计算。得到正的 Lyapunov 指数为 0.058,与运动方程得到的值相差 3.8%^[3],小于采用 wolf 法的误差 5%。

4 结语

本文提出了一种利用周期轨道不同权重计算 Lyapunov 指数的算法。它不用舍去开始迭代点,适用于复杂混沌系统。数值仿真结果也表明,采用该方法计算 Lyapunov 指数是有效的。本文是对整个混沌吸引子计算 Lyapunov 指数,是所有周

期轨线平均分离程度的展现。若要对三维以上的 Lyapunov 指数计算,本算法同样适用。

参考文献:

[1] 郝柏林. 从抛物线谈起[M]. 上海: 上海科技教育出版社,1995. 123.
 [2] LATHROP DP, KOTELICH EJ. Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits[J]. Physical Review A, 1989, 40(7): 4028 - 4031.
 [3] WOLF A, SWIFT JB, SWINNEY HL, et al. Determining Lyapunov Exponents From a Time Series[J]. Physica D, 1985, (16): 285 - 317.
 [4] ROSENTEIN MT, COLLINS JJ, DE LUCA CJ. A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets[J]. Physica D, 1993, (65): 117 - 134.
 [5] GAO JB, ZHENG Z. Local exponential divergence plot and optional embedding of a chaotic time series[J]. Physics Letters, 1993, (181): 153 - 158.
 [6] LAI YC, LERNER D. Effective scaling regime for computing the correlation dimension from chaotic time series[J]. Physica D, 1998, (115): 1 - 18.
 [7] 丘水生. 混沌吸引子周期轨道理论研究(I) [J]. 电路与系统学报, 2003, 8(6): 1 - 5.
 [8] 丘水生. 混沌吸引子周期轨道理论研究(II) [J]. 电路与系统学报, 2004, 9(1): 1 - 5.
 [9] 孙霞,吴自勤. 分形原理及其应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社,2003. 16.