

# Z变换和 $\Delta$ 变换的有限字长特性研究<sup>1)</sup>

陈宗基 高金源

(北京航空航天大学自控系,北京 100083)

张建贵

(航空航天部第六一一所)

## 摘 要

计算机的有限字长对数字控制器的实现有重要影响。本文介绍了 $\Delta$ 变换及其 $\delta$ 算子的数字控制器的实现方法,证明了 $\delta$ 算子实现方法在系数有限字长表示、运算中对舍入及截尾误差的影响;有限字长非线性因素对极限环振荡的影响等方面,都优于常用的 $z$ 变换及其 $q$ 算子的数字控制器实现方法。本文还提供了某型飞机的数字控制器在 $z$ 变换和 $\Delta$ 变换下的不同有限字长特性的数字仿真。

**关键词:** 有限字长,  $z$ 变换,  $\Delta$ 变换。

## 一、引 言

任何数字控制器都是在有限字长的计算机上实现的。一般情况下,有限字长会使系统的品质下降,甚至使系统失稳;有限字长还引入了非线性,从而导致极限环振荡和死带。近年来,不少学者开始重视数字控制器有限字长数值特性的研究<sup>[1,2]</sup>。1988年,美国控制理论未来方向专家研究小组报告中也明确提出,控制算法软件实现的有限字长特性的研究是控制理论未来研究方向之一<sup>[3]</sup>。

本文介绍 $\Delta$ 变换及其 $\delta$ 算子的数字控制器实现方法<sup>[2]</sup>。这种方法的有限字长特性优于常用的 $z$ 变换及其 $q$ 算子的实现方法。文中分析表明 $\delta$ 算子实现方法具有较好的系数表达精度和较小的舍入截尾误差的影响。并且证明了,在有限字长相同的条件下, $\delta$ 算子实现方法产生极限环振荡的可能性小于 $q$ 算子实现方法。

在 $z$ 变换中,定义了 $q$ 为超前算子,在 $\Delta$ 变换中,本文定义 $\delta$ 为增量差分算子。 $\delta$ 算子与 $q$ 算子的关系为

$$\delta = (q - 1)/T, \quad (1.1)$$

式中 $T$ 为采样周期。利用(1.1)式,任何 $q$ 算子的 $n$ 次多项式均可用等价的 $\delta$ 算子的 $n$ 次多项式来表示。

本文于1991年3月16日收到。

1) 航空科学基金资助的课题。本文曾在1990年全国控制理论与应用学术交流会上宣读。

用  $\delta$  算子表示的控制器或滤波器可以直接在计算机中实现,其基本运算单元是  $\delta^{-1}$

$$\alpha(k) = \delta^{-1}\beta(k) = \alpha(k-1) + T\beta(k-1). \quad (1.2)$$

上式可由  $\delta$  的定义式(1.1)得到,对于  $\delta$  算子表示的状态方程式

$$\begin{cases} \delta \mathbf{x}(k) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k). \end{cases} \quad (1.3)$$

其解可表为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \delta^{-1}\{A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k)\} \\ \quad = \mathbf{x}(k-1) + T\{A\mathbf{x}(k-1) + B\mathbf{u}(k-1)\}, \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k). \end{cases} \quad (1.4)$$

## 二、多项式系数的有限字长表示数值特性

任何控制器的分母或分子都可表示为  $q$  算子或  $\delta$  算子的多项式.在计算机实现中,这些多项式的系数都是用有限字长来表示的,从而导致了误差.通过估计因系数扰动引起的多项式零点的近似变化域,可比较不同算子实现时在数值特性上的优劣.由于系数的舍入截尾属于小扰动,所以本文采用多项式零点对系数的一阶导数来估计零点的变化域.

**引理 2.1**<sup>[2]</sup>, 给定任意  $n$  阶首一多项式  $P(x)$ ,  $x^{i-1}$  的系数为  $a_i$ , 其零点为  $\gamma_i (i \in n)$ , 定义参数向量及零点向量分别为

$$\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

$$\mathbf{r}^T = [r_1, r_2, \dots, r_n],$$

则有

$$J = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{a}} = - \left\{ r_i^{i-1} \prod_{l \neq i} (r_i - r_l)^{-1} \right\}.$$

证明.

$$\frac{\partial r_i}{\partial a_k} = \frac{\partial P(\mathbf{r}, \mathbf{a}) / \partial a_k}{\partial P(\mathbf{r}, \mathbf{a}) / \partial r} \Big|_{r=r_i} = -r_i^{i-1} \prod_{l \neq i} (r_i - r_l)^{-1}. \quad \text{证毕}$$

如下分析中,  $a_i'$  和  $a_i''$  分别表示  $\delta$  算子和  $q$  算子表达式中的系数  $a_i$ ;  $\gamma_i'$  和  $\gamma_i''$  分别表示  $\delta$  算子和  $q$  算子表达式中的零点  $\gamma_i$ . 浮点运算亦有同样结论.

由引理 2.1, 可得

$$\tilde{\mathbf{a}} \doteq J\tilde{\mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{a}}$  和  $\tilde{\mathbf{r}}$  是  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{r}$  的小变化量. 定点运算时要求每个系数  $a_i$  有相应的比例因子  $n_i$ , 使  $|a_i^*| = |a_i/n_i| \in [0, 1)$ , 由此(2.1)式变为

$$\tilde{\mathbf{r}} \doteq J^{-1}N\tilde{\mathbf{a}}^* \quad (2.2)$$

其中,  $N = \text{diag}\{n_i\}$ .

**定理 2.1**<sup>[2]</sup>. 若离散时域控制器的零极点在标准  $z$  平面的圆  $\|\mathbf{r}\| \leq 1$  和以  $(1, j0)$  为圆心, 以 0.5 为半径的圆的交集内, 则在相同的系数表达误差下,  $\delta$  算子多项式的零点变化域小于  $q$  算子多项式的零点变化域.

证明. 由式(2.2), 可得

$$\|\tilde{r}\| \leq \varepsilon \sup_i \left\{ \prod_{j \neq i}^n |r_j - r_i|^{-1} \sum_{l=0}^{n-1} |n_l| |r_i|^l \right\}, \quad (2.3)$$

其中,  $\varepsilon$  是  $\tilde{a}^*$  的舍入截尾误差, 即有  $\|\tilde{a}^*\| \leq \varepsilon$ . 对  $q$  算子形式, 取  $n_l = 2^{-m}$ , 由(2.3)式得

$$\|\tilde{r}''\| \leq \varepsilon \sup_i \left\{ \prod_{j \neq i}^n |r_j'' - r_i''|^{-1} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-m} |r_i''|^l \right\}. \quad (2.4)$$

由式(1.1)知,  $\delta$  算子和  $q$  算子多项式各自零点之间的关系为  $r_i' = (r_i'' - 1)/T$ . 于是, 在定理条件下, 当  $r_i' = -0.5/T$  时, 零点的绝对值最大. 因此, 当所有零点都在  $-0.5/T$  时, 多项式系数有最大绝对值. 因此, 适宜的比例因子是  $n_l = 2^{-m} \left(\frac{0.5}{T}\right)^{n-l}$ , 于是式(2.3)变为

$$\|\tilde{r}'\| \leq \varepsilon \sup_i \left\{ \prod_{j \neq i}^n |r_j' - r_i'|^{-1} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-m} \left(\frac{0.5}{T}\right)^{n-l} |r_i'|^l \right\} \quad (2.5)$$

再把  $r_i' = (r_i'' - 1)/T$  代入上式得:

$$\|\tilde{r}'\| \leq \varepsilon T^{-1} \sup_i \left\{ \prod_{j \neq i}^n |r_j'' - r_i''|^{-1} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-m} (0.5)^{n-l} |r_i'' - 1|^l \right\} \quad (2.6)$$

由于  $\tilde{r}'$  和  $\tilde{r}''$  分别是  $\Delta$  平面和  $z$  平面内的零点扰动, 两者幅值差  $T^{-1}$  倍. 为使式(2.4)和(2.6)能直接比较, 须引入变换  $\tilde{r}' = T\tilde{r}''$ , 于是式(2.6)变为

$$\|\tilde{r}'\| \leq \varepsilon \sup_i \left\{ \prod_{j \neq i}^n |r_j'' - r_i''|^{-1} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-m} (0.5)^{n-l} |r_i'' - 1|^l \right\} \quad (2.7)$$

由于  $(0.5)^{n-l} < 1$ , 以及定理条件  $|r_i'' - 1| < |r_i''|$ , 所以比较式(2.7)与(2.4), 有  $\sup \|\tilde{r}'\| < \sup \|\tilde{r}''\|$ . 因此在相同的  $\varepsilon$  误差下,  $\delta$  算子多项式零点的变化域比  $q$  算子多项式零点的变化域小. 证毕

定理 2.1 表明  $\delta$  算子提供了较不灵敏的系数表达形式. 此外还可用能保持  $S$  域闭环极点位置百分精度所需要的字长来度量  $q$  算子和  $\delta$  算子系数表达形式的优劣. 容易证明在同样的  $S$  域极点位置百分精度下,  $\delta$  算子控制器的系数表达字长比  $q$  算子控制器的系数表达字长要短.

### 三、运算中的舍入截尾误差

在控制算法软件实现中, 除多项式系数由有限字长表达外, 运算中还要采取舍入或截尾处理. 由此造成的系统输出误差可看作随机过程, 称为舍入截尾噪声.

考虑传递函数为  $H_c(p) = (n_1 p + n_0)/(p + d_0)$  的有限字长控制器, 其中  $p$  是算子, 可以是  $q$  或  $\delta$ , 它们的传递函数分别为

$$H_c(q) = [b_1 q + (b_0 T - b_1)]/[q + (a_0 T - 1)], \quad (3.1)$$

$$H_c(\delta) = (b_1 \delta + b_0)/(\delta + a_0), \quad (3.2)$$

如每步运算都产生  $2^{-b}$  的截尾误差, 其中  $b$  是字长, 则包含截尾噪声扰动的模型结构如图 1 所示. 其中,  $\varepsilon_i$  为正交分布的零均值随机变量, 在  $[-2^{-b}, 2^{-b}]$  范围内变化, 相

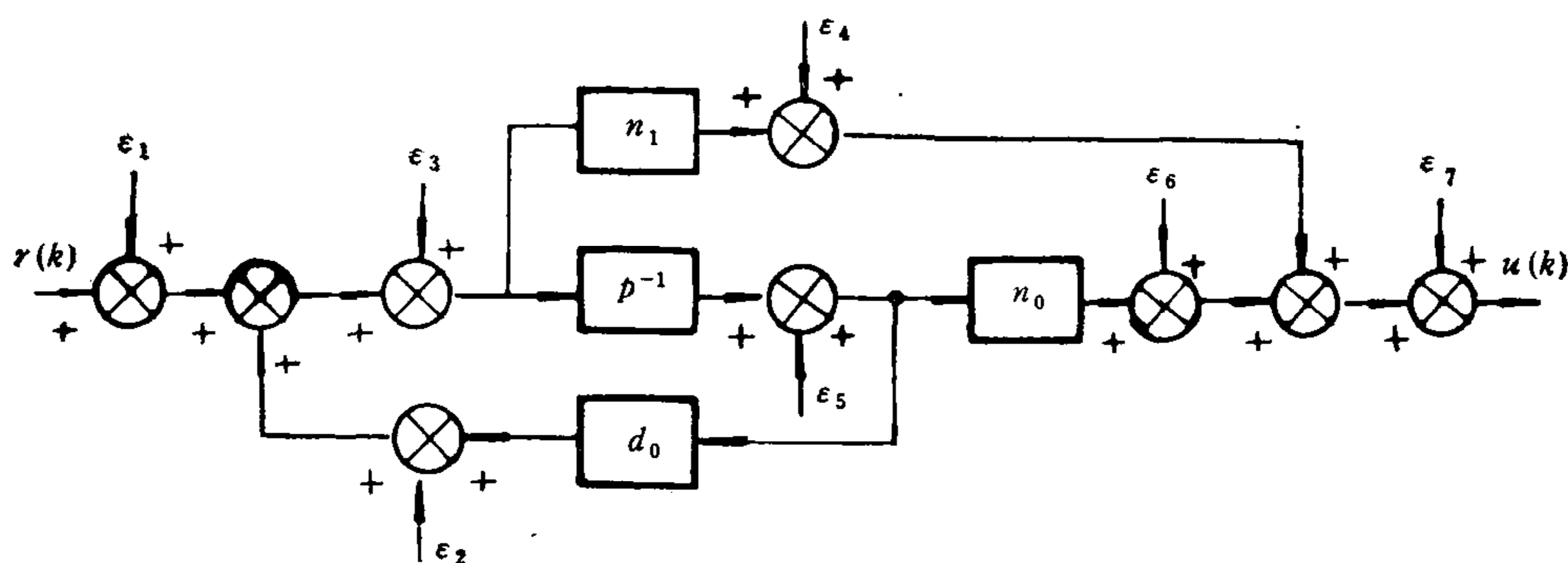


图1 误差模型结构图

互独立。于是每个噪声源对系统输出的影响可单独考虑,噪声源  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_7$  是输入、输出信号的量化误差,不论在  $\delta$  算子和  $q$  算子形式,它们对输出的影响相同。由输入输出关系,  $\varepsilon_2$  所导致的噪声输出为

$$u_2(k) = -[d_0 r(k)/(p + d_0)]H_c(p)\varepsilon_2, \quad (3.3)$$

其中,  $H_c(p)\varepsilon_2$  不论在  $\delta$  算子还是  $q$  算子形式都相同。但  $d_0/(p + d_0)$  的值在不同算子形式下是不等的

$$\delta \text{ 算子: } d_0 = a_0, \quad \frac{d_0}{p + d_0} = \frac{a_0}{\delta + a_0} = \frac{a_0}{\frac{q-1}{T} + a_0} = \frac{a_0 T}{q + a_0 T - 1},$$

$$q \text{ 算子: } d_0 = a_0 T - 1, \quad \frac{d_0}{p + d_0} = \frac{a_0 T - 1}{q + a_0 T - 1}.$$

在满足定理 2.1 的假设条件下,有  $0.5 < |1 - a_0 T| < 1$ , 即有  $0 < a_0 T < 0.5$ , 从而  $|1 - a_0 T| \geq |a_0 T|$ 。所以在  $\delta$  算子形式下,  $\varepsilon_2$  所导致的噪声输出小。  $\varepsilon_5$  至  $\varepsilon_6$  所导致的输出噪声分别为

$$u_4(k) = [n_1 p r(k)/(p + d_0)]\varepsilon_4,$$

$$u_5(k) = [(n_0 - d_0 n_1) r(k)/(p + d_0)][p/(p + d_0)]\varepsilon_5,$$

$$u_6(k) = [n_0 r(k)/(p + d_0)]\varepsilon_6.$$

除了  $\varepsilon_5$  所导致的输出误差外,可证明  $\varepsilon_4$  和  $\varepsilon_6$  所导致的输出误差,在  $\delta$  算子形式时比  $q$  算子形式时为小。  $\varepsilon_5$  所导致的输出误差,在  $q$  算子形式时为零,因为延迟运算没有误差。

以上分析表明,  $\delta$  算子形式几乎在所有情况下,截尾误差所导致的输出误差比  $q$  算子形式为小。

#### 四、极限环振荡与有限字长的关系

控制算法软件的有限字长实现引入了非线性,从而使控制系统有可能产生极限环振荡。

考虑一动态系统,其连续域、 $z$ 域和 $\Delta$ 域的状态方程表达式分别为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (4.1)$$

$$qx(k) = A_1x(k) + B_1u(k), \quad (4.2)$$

$$\delta x(k) = A_2x(k) + B_2u(k). \quad (4.3)$$

其中,  $A_1 = e^{AT}$ ,  $B_1 = A^{-1}(e^{AT} - I)B$ ;  $A_2 = (A_1 - I)T$ ,  $B_2 = B_1/T$ . 设  $A$  具有各异的实特征值,则  $A_1$  和  $A_2$  也具有各异实特征值,则

$$\text{diag}\{\lambda_i\} = P^{-1}AP,$$

$$\text{diag}\{\lambda'_i\} = P^{-1}A_1P,$$

$$\text{diag}\{\lambda''_i\} = P^{-1}A_2P.$$

其中,  $\lambda_i, \lambda'_i, \lambda''_i$  分别是连续域、 $z$ 域和 $\Delta$ 域的特征值,  $P$  是  $A$  的特征向量矩阵.

研究当输入  $u(k)$  为零时,运算中的舍入截尾误差产生极限环振荡的机理.

### 1. $z$ 变换

研究自由系统

$$qx(k) = A_1x(k). \quad (4.4)$$

令  $x = P\xi$ , 则有

$$q\xi(k) = \text{diag}\{\lambda'_i\}\xi(k). \quad (4.5)$$

若对运算作舍入处理,记为  $(\cdot)_R$ , 则上式变为

$$\xi(k+1) = \text{diag}\{((\lambda'_i)_R(\xi_i(k)))_R\},$$

或

$$\xi_i(k+1) = ((\lambda'_i)_R(\xi_i(k)))_R. \quad (4.6)$$

当  $0.5 \leq |\lambda'_i| < 1$ ,  $\forall i \in n$ , 而  $|(\xi_i(k))_R| = 2^{-b}$  时, 总有  $|\xi_i(k+1)| = 2^{-b}$ , 这意味着所有  $0.5 \leq |\lambda'_i| < 1$  的极点都等价于单位圆上的极点,即  $|\lambda'_i| = 1$ . 于是系统处于临界状态,有可能产生极限环振荡或死带.

定义:  $\Omega_1: 0.5 \leq \lambda'_i \leq 1$ ,

$$\Omega_2: -1 \leq \lambda'_i \leq -0.5.$$

在  $\xi_i(0) = 2^{-b}$  (实际上只要  $\xi_i(0)$  不为零)时, 当  $\lambda'_i \in \Omega_1$  时, 恒有  $\xi_i(k+1) = 2^{-b}$ ,  $\forall k \geq 0$ , 这就是有限字长导致的死带. 当  $\lambda'_i \in \Omega_2$  时, 有  $\xi_i(2k+1) = -2^{-b}$ ,  $\xi_i(2k) = 2^{-b}$ , 即产生了极限环振荡.

因此,在  $z$  变换条件下,当  $\lambda'_i$  是各异实数时,当  $\lambda'_i \in \Omega_2$  时,有限字长运算会使非零初始状态激励为极限环振荡. 考虑到  $\lambda'_i = e^{T\lambda_i}$ , 当采样周期减小时,就有可能产生极限环振荡或死带.

### 2. $\delta$ 算子

研究自由系统

$$\delta x(k) = A_2x(k). \quad (4.7)$$

令  $x = P\xi$ , 则有

$$\delta\xi(k) = \text{diag}\{(\lambda'_i - 1)/T\}\xi(k),$$

或

$$\delta\xi_i(k) = ((\lambda'_i - 1)/T)\xi_i(k). \quad (4.8)$$

对于  $T < 1$ , 选比例尺  $2T^{-1}$ , 式(4.8)变为

$$\left(\frac{T}{2}\right)\delta\xi_i(k) = ((\lambda'_i - 1)/2)\xi_i(k),$$

采用舍入处理,上式变为

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{2}\right)_R \xi_i(k) &= \delta^{-1}\{((\lambda'_i - 1)/2)_R(\xi(k))_R\} \\ &= \left(\left(\left(\frac{T}{2}\right)_R \left(\xi_i(k-1)\right)_R\right)_R + ((T)_R((\lambda'_i - 1)/2)_R(\xi_i \right. \\ &\quad \left. \cdot (k-1))_R)_R\right)_R. \end{aligned} \quad (4.9)$$

同样考虑  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  在  $\Delta$  域内的等价表示,  $\Omega_1: -0.25 \leq (\lambda'_i - 1)/2 < 0$ ;  $\Omega_2: -1 \leq (\lambda'_i - 1)/2 \leq -0.75$ . 当  $\lambda'_i \in \Omega_1$  时,且  $(\xi(0))_R = 2^{-b}$ , 式(4.9)变为

$$\left(\frac{T}{2}\right)_R \xi_i(k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

不产生极限环振荡,也不产生死带。当  $\lambda'_i \in \Omega_2$  时,(4.9)式变为

$$\left(\frac{T}{2}\right)_R \xi_i(k) = \left(\left(\frac{T}{2}\right)_R \left(\xi_i(k-1)\right)_R\right)_R + ((T)_R(\xi_i(k-1))_R)_R \quad (4.10)$$

当  $0 < T < 0.5$  时,  $(\xi_i(0))_R = 2^{-b}$  时,上式变为

$$\left(\frac{T}{2}\right)_R \xi_i(k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

不产生极限环振荡,也无死带。

当  $0.5 < T < 1$  时,  $(\xi_i(0))_R = 2^{-b}$  时,式(4.10)变为

$$\left(\frac{T}{2}\right)_R \xi_i(2k+1) = -2^{-b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\left(\frac{T}{2}\right)_R \xi_i(2k) = 2^{-b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

产生了极限环振荡。

比较 q 算子和  $\delta$  算子的有限字长对极限环振荡和死带的影响,有如下结论:

1) 在有限字长运算的条件下,  $\delta$  算子导致极限环振荡和死带的可能性比 q 算子的可能性小;

2) 当采用 q 算子实现方法而采样周期又较小时,不是产生死带,就是产生极限环振荡。对于  $\delta$  算子实现方法,采样周期在  $0 < T < 0.5$  范围内(可满足大部分工程问题),既不会产生极限环振荡,又不会产生死带。

## 五、仿真研究

图 2 是某型飞机的数字式飞行控制系统结构图。F 为驾驶杆指令输入,采样周期为 0.025 秒,飞机方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned}$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} -2.5176 & 0.98254 \\ 12.3216 & -2.4819 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.28124 & -0.36382 \\ -42.260 & -6.1238 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1.3077 & -0.009 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.1609 & 0.1332 \end{bmatrix}$$

把图示控制器分别以 Z 变换和 Δ 变换方法获得对应的 q 算子和 δ 算子表示的数字控制器,然后用数字仿真来比较它们的有限字长特性.在仿真中,两种情况下的 A/D 和 D/A

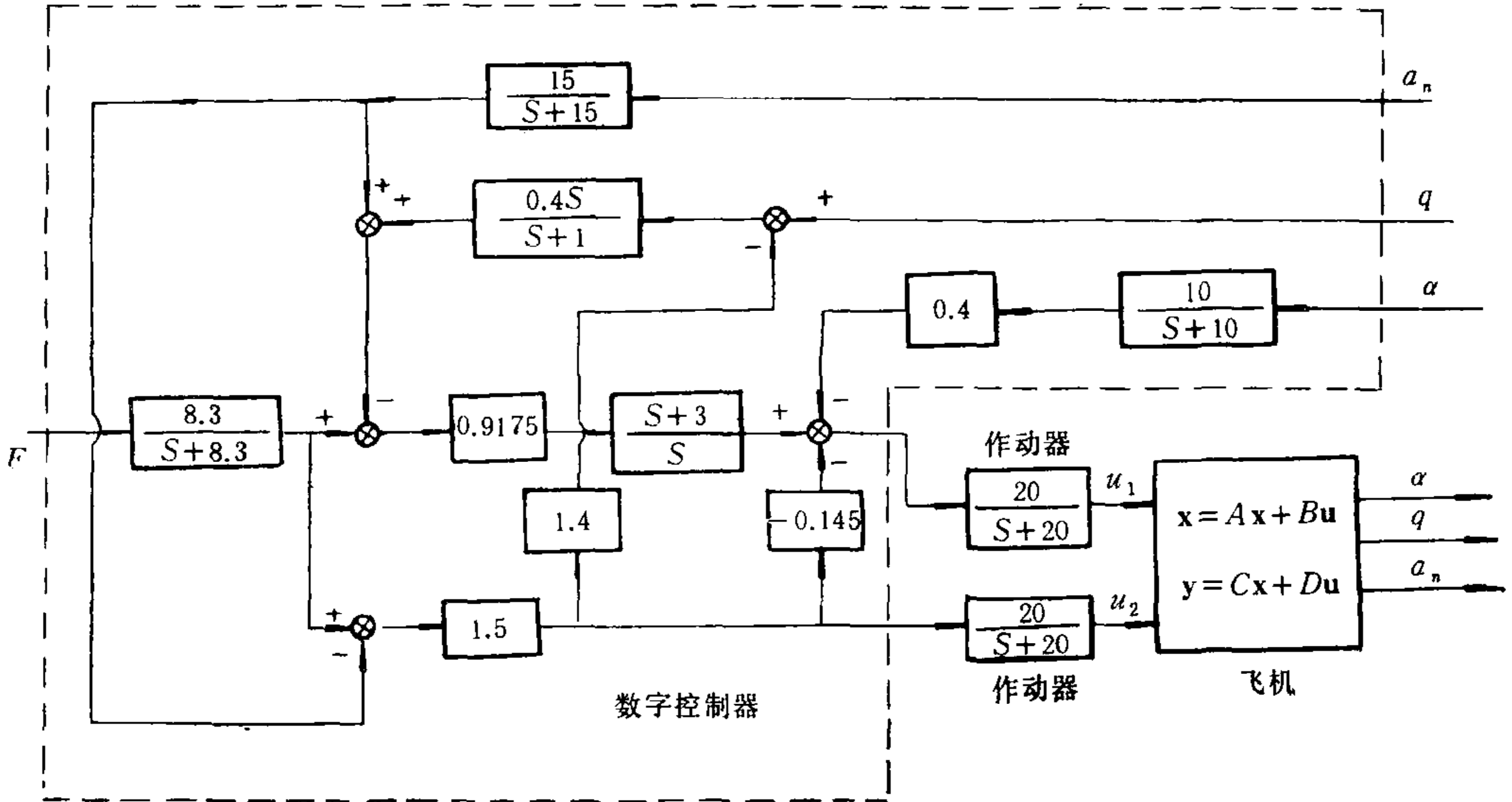


图 2 某飞行控制系统结构图

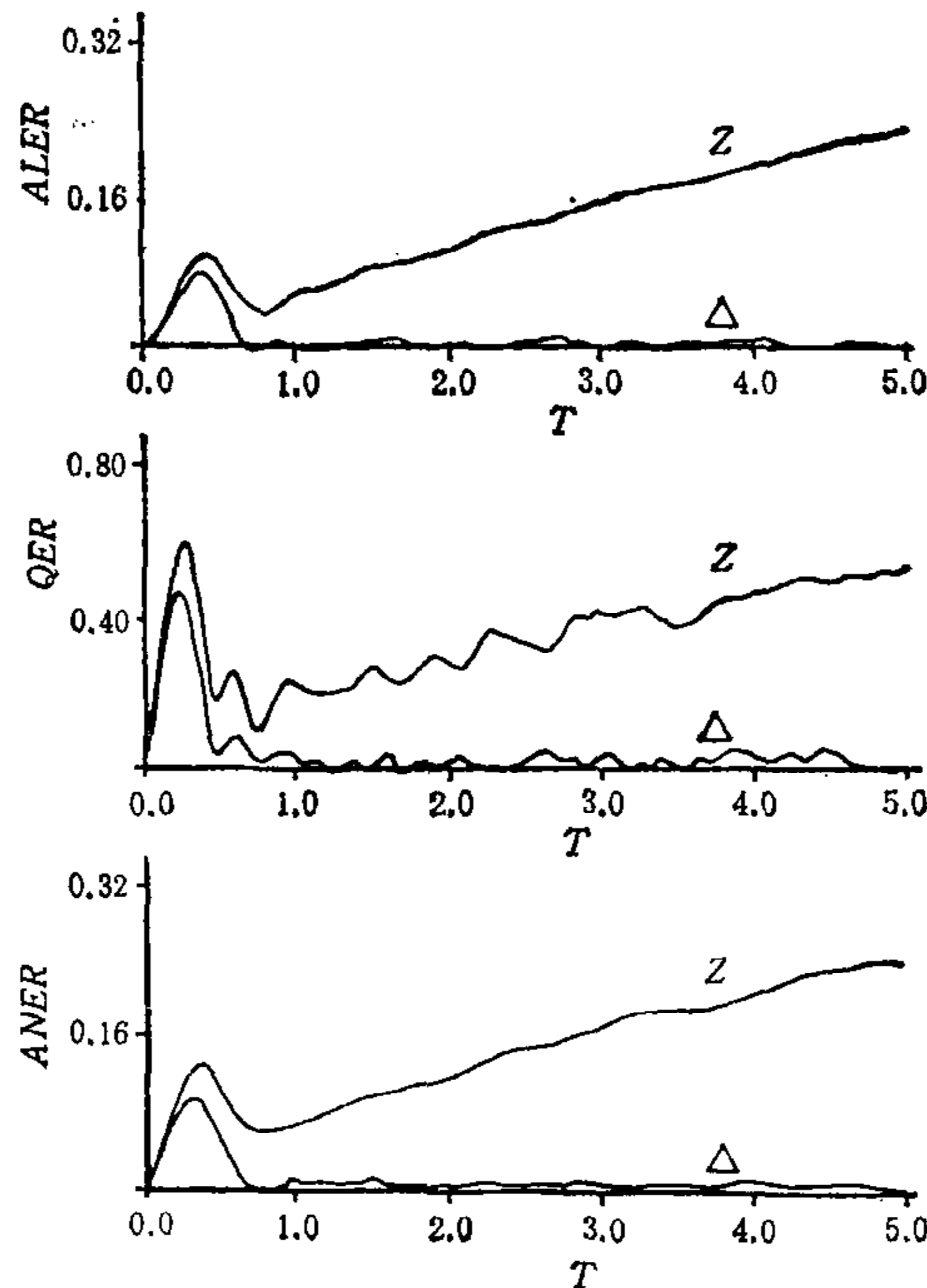


图 3 时间响应曲线

的位数为 6 位,具有相同量化效应。

系统在阶跃输入  $F = 2$  的作用下,其输出响应  $a_n$ ,  $q$  和  $\alpha$  的误差曲线如图 2 所示。在 6 位有限字长的情况下,控制器用  $\delta$  算子实现时,其输出误差小,且趋于一个稳态值。而用  $q$  算子实现时,输出误差较大,且呈发散趋势。由此可见, $\delta$  算子的有限字长特性明显优于  $q$  算子的有限字长特性。

## 六、结 论

数字控制器的  $\delta$  算子实现方法的数值特性优于  $q$  算子实现方法。 $\delta$  算子模型形式提供了较不灵敏的多项式系数表达,并且使运算中的舍入截尾扰动对系统输出的影响较小, $\delta$  算子使有限字长导致极限环振荡和死带的可能性减小。

## 参 考 文 献

- [1] Ahmed, M. E. et al, Scaling and Roundoff in Fixed Point Implementation of Control Algorithm, *IEEE Trans. On Industrial, Electronics*, 1984.
- [2] Middleton, R. H. and Goodwin, G. C., Improved Finite Word Length Characteristics in Digital Control Using Delta Operator, *IEEE Trans on Autom. Control*, 11(1986).
- [3] 控制理论的未来方向研究小组,控制理论的未来方向,710所译,1988.

# A STUDY ON FINITE WORD LENGTH CHARACTERISTICS OF Z-TRANSFORM AND $\Delta$ -TRANSFORM

CHEN ZONGJI GAO JINYUAN

(Dept. of Automatic Control Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 100083)

ZHANG JANGUI

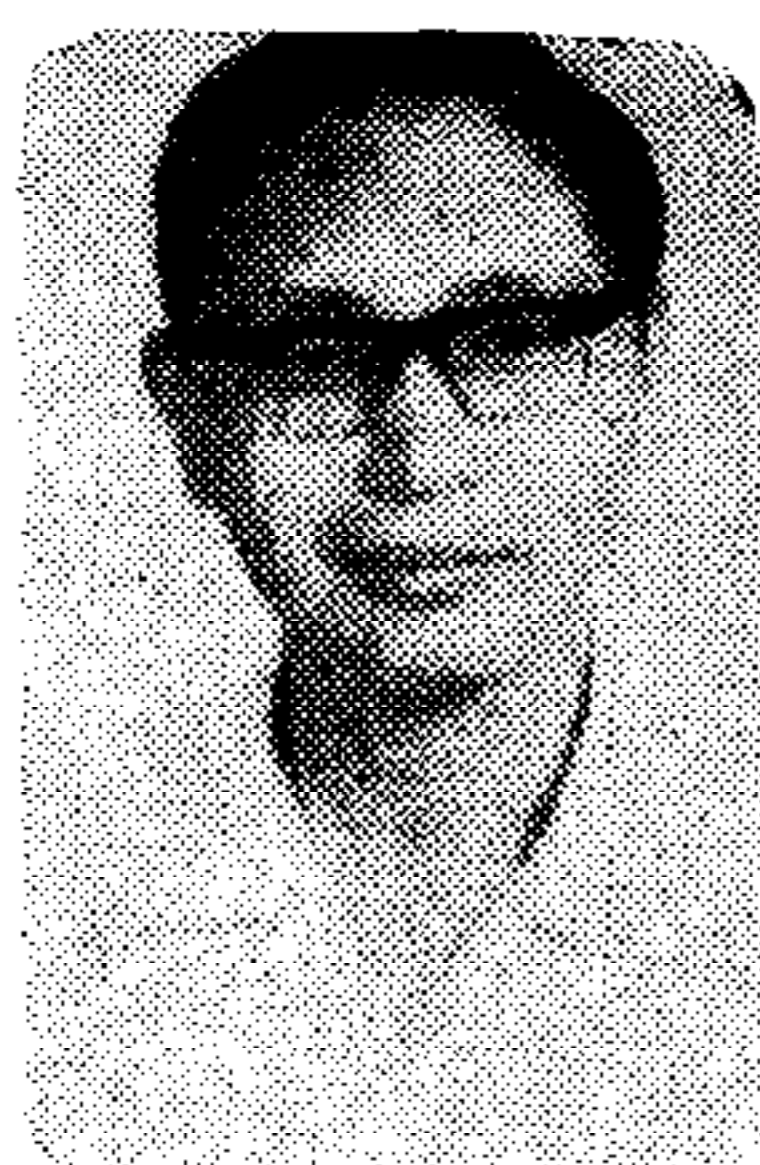
(611 Research Institute)

## ABSTRACT

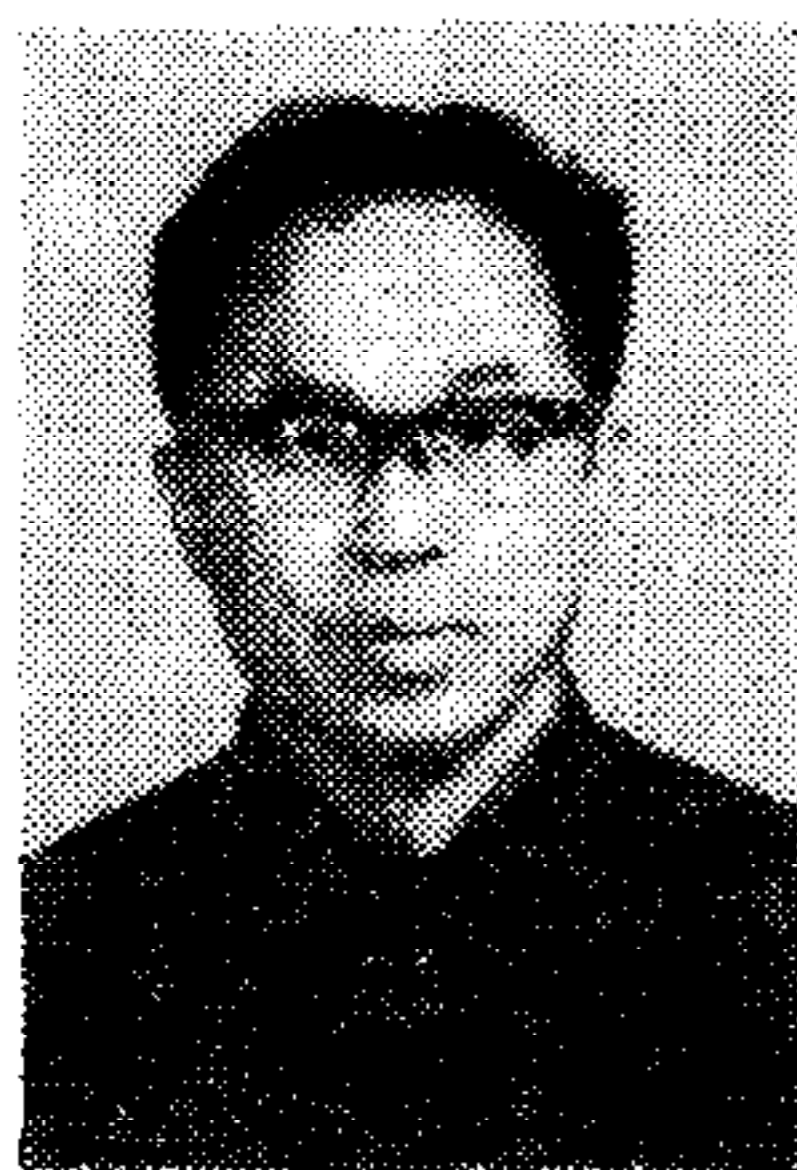
The finite word length of digital computers has great influence on the implementation of control software. This paper introduces the  $\Delta$ -transform and  $\delta$ -operator, and compares them with the commonly used Z-transform and q-operator. It is shown that  $\Delta$ -transform is more accurate for coefficient representation and has better performance for round off noise. In addition,  $\Delta$ -transform has the advantage of eliminating the limit cycles caused by the finite word length nonlinearity.

**Key words:** Finite word length; Z-transform;  $\Delta$ -transform.





**陈宗基** 1943年3月生,1966年毕业于北京航空航天大学自动控制系,1980年和1983年分别获英国曼彻斯特大学控制中心硕士和博士学位。现为北京航空航天大学自动控制系教授,飞行器控制、制导与仿真博士生导师。研究方向为自适应、自学习、自组织系统;鲁棒控制理论与应用;现代飞行控制系统设计与仿真;专家系统与智能控制。近年来在国内外重要杂志上发表上述领域的论文共31篇,著作有“自适应技术的理论与应用”、“随机系统的辨识与控制”。



**高金源** 副教授,生于1936年,1960年8月毕业于北京航空学院导弹自动控制专业,从事自动控制理论的教学工作。1964年考入北京航空学院自动控制专业在职研究生。从1970年开始继续从事飞机自动控制的教学与科研工作。1976—1980年间负责国内第一套飞行模拟机视景计算机控制伺服系统的研制。1980年至今,一直承担重点预研课题“数控技术在主动控制技术中的应用”的研究,以及数字飞行控制系统计算机辅助设计软件的开发,并从事有关计算机控制系统的教学工作。



**张建贵** 1961年生,1982年获北京航空学院飞机设计专业学士学位,1985年获北京航空学院飞行器导航及控制专业硕士学位,1985年至今为航空航天部第六一一所工程师。