第19卷 第6期 自动化学报 Vol. 19, No. 6
1993年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1993

短文

Petri网的广义笛积运算[1)]

蒋昌俊

（山东矿业学院，泰安 271019）

摘要

文[1]曾给出Petri 网的两种合成方法，即 P/T 网的加法和笛积运算. 本文再提出几种 P/T 网的广义笛积运算，这几种运算都较好地保持网的结构性质. 对此给出实例，显示了它们在 P/T 网的合成与分析中的作用.

关键词： 离散动态系统，Petri 网，广义笛积.

一、引言

Petri 网是系统模拟与分析的一种有效工具. 如同其它分析方法一样，对于大系统的分析也是 Petri 网方法的一个困难. 文[1]首次提出 Petri 网的加法和笛积运算，以此作为系统合成与分析的手段. 本文进一步提出广义笛积运算，并讨论了它们的代数性质及其应用.

本文涉及到的定义、术语可见文献[1],[3]. 下面给出广义笛积的定义.

定义 1. 设 $N_i=(P_i,T_i;W_i),i=1,2$，是两个 P/T 网，若

1) $N_i=N_{i1}+N_{i2}+\cdots+N_{ir},i=1,2$;

2) $N_{ij}=(P_{ij},T_{ij}W_{ij}),j=1,2,\cdots,r;i=1,2$;

3) $P_i=P_{i1}\cup P_{i2}\cup\cdots\cup P_{ir},i=1,2$;

4) 对 $\forall j,k:1\leqslant j,\ k\leqslant r,j\neq k$，都有 $P_{ij}\cap P_{ik}=\phi,i=1,2$;

5) $W_{ij}:T_i\times P_{ij}\rightarrow z,j=1,2,\cdots,r;i=1,2$;

6) $N=\sum\limits_{j=1}^{r}(N_{1j}\circledast N_{2j})$.

则称N为N_1和N_2的$*$型 P-划分笛积网，并记作 $N=N_1\circledast N_2$，其中$*=I$或II.

定义 2. 设 $N_i=(P_i,T_i;W_i),i=1,2$ 是两个 P/T 网，若

1) $N_i=N_{i1}+N_{i2}+\cdots+N_{iq},i=1,2$;

2) $N_{ij}=(P_i,T_{ij};W_{ij}),j=1,2,\cdots,q;i=1,2$;

3) $T_i=T_{i1}\cup T_{i2}\cup\cdots\cup T_{iq},i=1,2$;

本文于1991年3月29日收到.

1) 国家自然科学基金资助课题.

4) 对 $\forall j,k:1\leqslant j,k\leqslant q,j\neq k$,都有 $T_{ij}\cap T_{ik}=\phi,i=1,2$;

5) $W_{ij};T_{ij}\times P_i\to Z,j=1,2,\cdots,q$;

6) $N=\sum_{j=1}^{q}(N_{1j}\circledast N_{2j})$.

则称N为N_1和N_2的$*$型 T-划分笛积网,并记作 $N=N_1\circledast_T N_2$,其中$*=I$或II.

注. 这里"+","Ⓘ","Ⓘⓘ" 分别表示网的加法、I型笛积和II型笛积运算[1].

二、广义笛积的代数性质

引理 1. 设 $A_i=(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ir})$ 为 P/T 网 N_i 的关联矩阵,A_{ij} 为子网 N_{ij} 的关联矩阵 $(i=1,2;j=1,2,\cdots,r)$,则 $N=N_1\text{Ⓘ}_P N_2$ 的关联矩阵为$A=(A_{11}\otimes A_{21}A_{12}\otimes A_{22}\cdots A_{1r}\otimes A_{2r})$这里$\otimes$为矩阵直积.

引理 2. 设 $A_i=A_i^+-A_i^-=(A_{i1}^+A_{i2}^+\cdots A_{ir}^+)-(A_{i1}^-A_{i2}^-\cdots A_{ir}^-)$ 为 P/T 网 N_i 的关联矩阵,$A_{ij}=A_{ij}^+-A_{ij}^-$ 为子网 N_{ij} 的关联矩阵 $(i=1,2;\ j=1,\ 2,\cdots,\ r)$. 则 $N=N_1\text{Ⓘⓘ}_P N_2$ 的关联矩阵为 $A=A^+-A^-=(A_{11}^+\otimes A_{21}^+\ A_{12}^+\otimes A_{22}^+\cdots A_{1r}^+\otimes A_{2r}^+)-(A_{11}^-\otimes A_{21}^-A_{12}^-\otimes A_{22}^-\cdots A_{1r}^-\otimes A_{2r}^-)$.

上述结论可直接由定义1、2推出.

定理 1. 设 N_1,N_2 均为可重复的 P/T 网,则 $N=N_1\circledast_P N_2$ 也是可重复的,这里 $*=$ I或II.

证明. 1) $*=I$ 的情况

设 N_i 的关联矩阵为 $A_i=(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ir}),i=1,2$; 由 N_i 的可重复性知存在 n_i 维正整数向量 $\boldsymbol{x}_i$,使得

$$A_i^T\boldsymbol{x}_i\geqslant 0,\ i=1,2;$$

也即
$$(\boldsymbol{x}_i^TA_{i1}\boldsymbol{x}_i^TA_{i2}\cdots\boldsymbol{x}_i^TX_{ir})^T\geqslant 0,i=1,2;$$

设N的关联矩阵为A,则对 n_1n_2 维向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2$. 有

$$A^T\boldsymbol{x}=(A_{11}\otimes A_{21}A_{12}\otimes A_{22}\cdots A_{1r}\otimes A_{2r})^T(\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2).$$

根据文[1]中引理4得

$$A^T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1^TA_{11}\otimes\boldsymbol{x}_2^TA_{21}\boldsymbol{x}_1^TA_{12}\otimes\boldsymbol{x}_2^TA_{22}\cdots\boldsymbol{x}_1^TA_{1r}\otimes\boldsymbol{x}_2^TA_{2r})^T\geqslant 0.$$

从而可知 $N=N_1\text{Ⓘ}_P N_2$ 也是可重复的.

2) $*=$ II 的情况

设 N_i 的关联矩阵为 $A_i=A_i^+-A_i^-=(A_{i1}^+A_{i2}^+\cdots A_{ir}^+)-(A_{i1}^-A_{i2}^-\cdots A_{ir}^-),i=1,2$; 由 N_i 的可重复性知存在 n_i 维正整数向量 $\boldsymbol{x}_i$,使得 $A_i^T\boldsymbol{x}_i\geqslant 0,i=1,2$;即

$$((A_i^+)^T-(A_i^-)^T)\boldsymbol{x}_i\geqslant 0.$$

而 $A_i^+,A_i^-\geqslant 0,\boldsymbol{x}_i>0$,所以有

$$(A_i^+)^T\boldsymbol{x}_i\geqslant(A_i^-)^T\boldsymbol{x}_i\geqslant 0,\ i=1,2;$$

即
$$(\boldsymbol{x}_i^TA_{i1}^+\boldsymbol{x}_i^TA_{i2}^+\cdots\boldsymbol{x}_i^TA_{ir})^T\geqslant(\boldsymbol{x}_i^TA_{i1}^-\boldsymbol{x}_i^TA_{i2}^-\cdots\boldsymbol{x}_i^TA_{ir}^-)^T\geqslant 0,i=1,2;$$

设N的关联矩阵为A,则对 n_1n_2 维向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2$ 有

$$A^T\boldsymbol{x}=(A^+-A^-)^T\boldsymbol{x}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A_{11}^{+}\otimes A_{21}^{+}A_{12}^{+}\otimes A_{22}^{+}\cdots A_{1r}^{+}\otimes A_{2r}^{+})^{T}(\boldsymbol{x}_1\otimes \boldsymbol{x}_2)\\
&\quad - (A_{11}^{-}\otimes A_{21}^{-}A_{12}^{-}\otimes A_{22}^{-}\cdots A_{1r}^{-}\otimes A_{2r}^{-})^{T}(\boldsymbol{x}_1\otimes \boldsymbol{x}_2)\\
&= ((\boldsymbol{x}_1^T A_{11}^{+})\otimes(\boldsymbol{x}_2^T A_{21}^{+})(\boldsymbol{x}_1^T A_{12}^{+})\otimes(\boldsymbol{x}_2^T A_{22}^{+})\cdots(\boldsymbol{x}_1^T A_{1r}^{+})\otimes(\boldsymbol{x}_2^T A_{2r}^{+}))^T\\
&\quad - ((\boldsymbol{x}_1^T A_{11}^{-})\otimes(\boldsymbol{x}_2^T A_{21}^{-})(\boldsymbol{x}_1^T A_{12}^{-})\otimes(\boldsymbol{x}_2^T A_{22}^{-})\cdots(\boldsymbol{x}_1^T A_{1r}^{-})\otimes(\boldsymbol{x}_2^T A_{2r}^{-}))^T \geqslant 0
\end{aligned}
$$

从而可知 $N = N_1\textcircled{\mathrm{II}_P}N_2$ 也是可重复的.

类似地可以证明下面结论.

定理 2. 设 N_1, N_2 是两个 P/T 网，若 N_1,N_2 中至少有一个是相容的，则 $N = N_1\textcircled{\mathrm{II}_P}N_2$ 也是相容的.

推论 1. 设 N_1,N_2 是两个 P/T 网，$\boldsymbol{x}_1$是N_1的一个 T-不变量，1）若 $N = N_1\textcircled{\mathrm{I}_P}N_2$，$\boldsymbol{x}_2(\neq 0)$ 为一个 n_2 维非负整数向量，则 $\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2$ 是N的一个 T-不变量；2）若 $N = N_1\textcircled{\mathrm{II}_P}N_2$，$\boldsymbol{x}_2$ 为 N_2 的一个 T-不变量，则 $\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2$ 是N的一个 T-不变量.

定理 3. 设 N_1,N_2 均是结构有界的 P/T 网，则 1）$N = N_1\textcircled{\mathrm{I}_T}N_2$ 的逆网 N'（N 网中所有弧反向）也是结构有界的；2）$N = N_1\textcircled{\mathrm{II}_T}N_2$ 也是结构有界的.

定理 4. 1）P/T 网 N_1,N_2 中至少有一个是守恒网，则 $N = N_1\textcircled{\mathrm{I}_T}N_2$ 也是守恒网；2）P/T 网 N_1,N_2 均是守恒网，则 $N = N_1\textcircled{\mathrm{II}_T}N_2$ 是守恒网.

推论 2. 1）若 $\boldsymbol{y}_1$ 是 P/T 网 N_1 的一个 S-不变量，$\boldsymbol{y}_2(\neq 0)$ 为一个 m_2 维非负整数向量，则 $\boldsymbol{y}_1\otimes\boldsymbol{y}_2$ 是 $N = N_1\textcircled{\mathrm{I}_T}N_2$ 的一个 S-不变量；2）若 $\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$ 分别是 P/T 网 N_1,N_2 的 S-不变量，则 $\boldsymbol{y}_1\otimes\boldsymbol{y}_2$ 是 $N = N_1\textcircled{\mathrm{II}_T}N_2$ 的 S-不变量.

三、应 用 举 例

下图是文 [5] 给出的一加工系统的 Petri 网模型，应用 I 型 T-划分笛积运算及文 [1] 中的加法运算对此进行分析.

该网的关联矩阵 A 可以写成

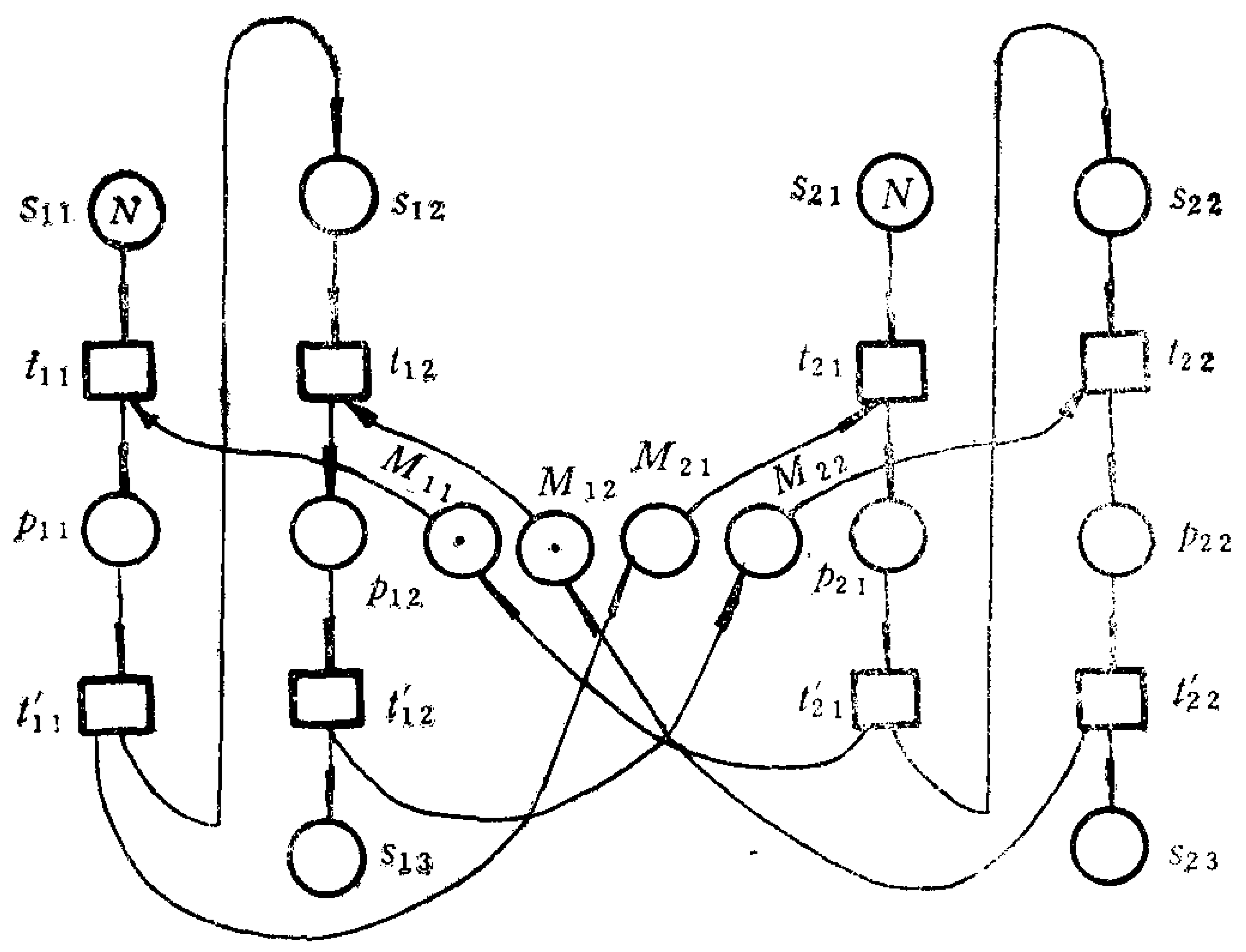

图 1　Petri 网模型

$$A = A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} E_1 \otimes H \\ E_2 \otimes H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \otimes L \\ F_2 \otimes L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \otimes H_1 \\ E_1 \otimes H_2 \\ E_2 \otimes H_1 \\ E_2 \otimes H_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \otimes L_1 \\ F_1 \otimes L_2 \\ F_2 \otimes L_1 \\ F_2 \otimes L_2 \end{bmatrix}.$$

其中

$$E_1 = [1\ 0],\ E_2 = [0\ 1],\ H_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{y}_h = [1111100]^T$，则 $H_i\boldsymbol{y}_h = 0, L_i\boldsymbol{y}_h = 0, i = 1,2$. 即 $\boldsymbol{y}_h$ 分别是H对应的子网和L对应的子网的一个 S-不变量. 取 $\boldsymbol{v} = [11]^T$，则根据推论 2 知 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{y}_h$ 分别是 A_1, A_2 对应子网的 S-不变量. 又根据文 [1] 的定理 6 知 $\boldsymbol{y}$ 是A的一个 S-不变量.

这样，由上述矩阵表示及推理得到结论:

(1) 该系统结构由 A_1, A_2 两部分构成，其中 A_1 为机器加工过程结构; A_2 为机器释放过程结构.

(2) $E_i \otimes H_j + F_i \otimes L_j$ 表示工件 R_i 在机器 M_j 上加工完后转到 M_{j+1} 的入口 (注. M_3 的入口也即 M_2 的出口)，同时释放机器 M_j，从而工件 $R_{(i \bmod 2)+1}$ 获得在机器 M_j 上的加工权 ($i = 1,2; j = 1,2$).

(3) $A_1 = \begin{bmatrix} E_1 \otimes H \\ E_2 \otimes H \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} F_1 \otimes L \\ F_2 \otimes L \end{bmatrix}$，从而可知工件 R_1, R_2 的加工过程和释放机器过程均分别相同.

(4) 由于 $(E_i \otimes H_j + F_i \otimes L_j) \wedge (E_{(i \bmod 2)+1} \otimes H_{(j \bmod 2)+1} + F_{(i \bmod 2)+1} \otimes L_{(j \bmod 2)+1}) = 0$ (注 $[a_{ij}]_{n \times m} \wedge [b_{ij}]_{n \times m} = [a_{ij} \wedge b_{ij}]_{n \times m}$，"$\wedge$" 为逻辑与运算)，因此，$E_i \otimes H_j + F_i \otimes E_j$ 与 $E_{(i \bmod 2)+1} \otimes H_{(j \bmod 2)+1} + F_{(i \bmod 2)+1} \otimes L_{(j \bmod 2)+1}$ 可以并发地进行 ($i, j = 1,2$).

(5) 考虑到初始状态$M_0(M_{11}) = M_0(M_{12}) = 1, M_0(M_{21}) = M(M_{22}) = 0$，结合 4)可知对多个 R_1, R_2 加工时，按顺序 $R_1, R_2, R_1, R_2, R_1 \cdots$ 进行.

(6) $\boldsymbol{y}_h$ 是H对应子网的一个 S-不变量，解释为一个工件在加工过程中数量不发生变化，即加工前一个，加工后得到的仍是一个. 同理，由 Y 是A对应网的一个 S-不变量，解释为整个加工过程不改变工件的数量.

参 考 文 献

[1] Jiang Changjun and Wu Zhehui, Net Operations, *Journal of Computer Science and Technology*, **7**(1992),(4),333—344.

[2] Berthelot. G and Roucairol. G, Reduction of Nets and Parallel Programs, *Lecture Nets in Computer Science*, **84**(1980),277—290.

[3] 吴哲辉，有界Petri 网的活性和公平性的分析与实现，计算机学报，**12**(1989),(4),267—278.

[4] 吴铁军，吕勇哉，离散事件动态系统稳定性分析方法，自动化学报，**16**(1990),(5),408—413.

[5] 宋安华，柔性制造系统实时调度的有色Petri 网和状态方程模型，计算机学报，**14**(1991),(11),837—845.

OPERATIONS FOR GENERAL CARTESIAN MULTIPLICATION OF P/T NETS

JIANG CHANGJUN
(*Shandong Mining Institute Shandon*, 271019)

ABSTRACT

Two composition methods of Petri nets had been given in [1] i.e. addition and Cartesian multiplication of p/T nets. In this paper, some operations of general Cartesian multiplication for p/T nets are given. These operations preserve the structural properties of Petri nets. An example is given to show that it is useful for the composition and analysis of P/T nets.

Key words: discrete event dynamic systems; Petri nets; general Cartesian multiplication.

(上接 760 页)

张伯鹏	张　玲	张洪才	张立明	张兆璞	张炘中	张光佑	迟惠生	初学导
佟明安	肖德云	陆汝龄	周其节	周鸿兴	周春晖	郑毓蕃	郑　峰	郑应平
郑维敏	郑大钟	郑丕谔	欧阳楷	林建祥	林尧瑞	林行刚	林作铨	林元烈
岳超源	范玉顺	法京怀	庞国仲	易继锴	茅于杭	罗宗虔	罗乔林	罗曼丽
段广仁	钟宜生	钟延炯	项国波	施颂椒	赵希人	赵南元	赵克友	赵致琢
赵似兰	洪家荣	姚增起	姚妙新	姚　蓝	姚　郁	俞铁成	俞　斌	姜启源
胡保生	胡文瑾	胡恒章	胡寿松	胡庭姝	胡　莲	胡建崑	胡道元	胡顺菊
洪奕光	贺星剑	贺　军	贺建勋	谈大龙	倪茂林	秦化淑	郭　雷	郭余庆
顾兴源	顾基发	顾发及	徐树方	徐光佑	徐衍华	徐南荣	徐东玲	徐文立
徐立鸿	徐道义	贾培发	贾沛璋	贾英民	高为炳	高东杰	高　龙	高玉琦
钱敏平	钱大群	柴天佑	席裕庚	袁震东	袁著祉	袁保宗	袁曾任	涂序彦
涂　健	涂菶生	唐泽圣	夏小华	夏国洪	黄　琳	黄秉宪	黄志同	黄心汉
黄俊钦	黄圣国	黄泰翼	阎醒民	阎平凡	曹晋华	曹曙光	崔保民	龚　伟
龚　俭	韩志刚	韩曾晋	韩正之	韩京清	韩慧君	韩文秀	舒迪前	舒　煌
程　侃	程　一	程民德	程　鹏	$\boxed{\text{程　勉}}$	程　虎	傅佩琛	蒋慰孙	曾　南
疏松桂	葛成辉	彭群生	彭商贤	谢绪凯	谢惠民	谢新民	谢胜利	裘聿皇
解学书	雷渊超	虞润禄	雍炯敏	褚家晋	熊光楞	廖炯生	廖晓昕	谭维康
谭　民	瞿寿德	蔡自兴	蔡季冰	蔡鹤皋	蔡茂诚	缪尔康	滕云鹤	潘士先
潘　弘	薛劲松	薛景瑄	戴汝为	戴冠中	戴　矩	魏湘曙		