第30卷第2期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 30, No. 2
2001年6月　　J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)　　Jun. 2001

# Brown 定理的一个组合证明

宋传宁

(上海师范大学 数学科学学院，上海 200234)

**摘　要**：QUILLEN 利用代数拓扑的方法证明了 Brown 定理，BACLAWSKI 也是用代数拓扑理论得到公式 $\mu(P)=\mu(Q)-\sum_{y\in Q}\mu(y/f)\mu(\hat{0},y)$. 作者先给出 $\mu(P)=\mu(Q)-\sum_{y\in Q}\mu(y/f)\mu(\hat{0},y)$ 的组合证明，然后利用该方法给出了 Brown 定理的组合证明.

**关键词**：Brown 定理；Mobius 函数；纤维

**中图分类号**：O157　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2001)02-0024-04

## 1　基本概念

设 $P$ 是偏序集，$P$ 中的元 $x_0$ 称为 $P$ 的最大元(最小元)，若对任意的 $y\in P$ 有 $y\leqslant x_0$ ($y\geqslant x_0$). $P$ 中的元 $x$ 称为是 $P$ 的极大元(极小元)，若有 $P$ 中的元 $y$ 使得 $y\geqslant x$ ($y\leqslant x$)，则 $y=x$. $f$ 称为 $P$ 到偏序集 $Q$ 的保序映射，若在 $P$ 中有 $x\leqslant y$，则在 $Q$ 中有 $f(x)\leqslant f(y)$. 偏序集 $P$ 上的 Mobius 函数

$$\mu:\begin{cases}P\times P\to Z\\ (x,y)\to\mu(x,y)=\begin{cases}0 & x\nleqslant y\\ 1 & x=y\\ -\sum\limits_{x\leqslant z<y}\mu(x,z) & x<y.\end{cases}\end{cases}$$

特别地，$\mu(P)=\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1})$，$\hat{P}$ 为 $P$ 中人为地添加一个最大元 $\hat{1}$ 和最小元 $\hat{0}$. 在不至于混淆的情况下，除特别说明，记 $\mu_{\hat{P}}(\hat{0},x)$ 为 $\mu(\hat{0},x)$，$\mu_{\hat{P}}(x,\hat{1})$ 为 $\mu(x,\hat{1})$.

HALL 有一个深刻的结论，当 $P$ 是有限偏序集时，$\mu(P)=\tilde{\chi}(|P|)$，(这里 $|P|=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n)\mid x_0<x_1<\cdots<x_n,\ x_i\in P,\ i=0,1,\cdots,n\}$，$x_0<x_1<\cdots<x_n$ 称为 $P$ 中的 $n$ 维链.)，由此说明 Mobius 函数是一个拓扑不变量. QUILLEN 在文[1]中的命题 1.6 叙述，如果 $f/y$ 是可缩的，那么 $f$ 是同伦等价的. BACLAWSKI 在文[2]中得到 $\mu(P)=\mu(Q)-\sum_{y\in Q}\mu(y/f)\mu(\hat{0},y)$，他是利用代数拓扑的理论来说明这个结论的，本文要对 BACLAWSKI 的这一结论给出一个初等的组合证明，并利用该方法给出 Brown 定理的组合证明. 为此，首先引进

**引理 1.1**[3]　设 $P$ 是有限偏序集，则 $\mu(P)=\mu(P-\{x\})+\mu(\hat{0},x)\mu(x,\hat{1})$.

**引理 1.2**　设 $P$ 为有限偏序集，且 $P$ 有最大元或最小元，则 $\mu(P)=0$.

**证明**　不妨设 $x$ 是 $P$ 的最大元，则

$$\mu(P)=-\sum_{y\in P}\mu(\hat{0},y)-\mu(\hat{0},\hat{0})=-\mu(\hat{0},x)-\sum_{x>y\in P}\mu(\hat{0},y)-\mu(\hat{0},\hat{0}),$$

**收稿日期**：2000-10-25

**基金项目**：上海市高等学校科学技术发展基金(CL9909)

**作者简介**：宋传宁(1962-)，女，上海师范大学数学科学学院讲师.

而 $\mu(\hat{0},x)=-\sum_{y<x}\mu(\hat{0},y)-\mu(\hat{0},\hat{0})$，代入得 $\mu(P)=0$.

**引理 1.3** 设 $P$ 是有限偏序集，若存在 $P$ 上的保序映射 $f$，使得对任意 $x\in P$ 有 $x\leqslant f(x)\geqslant x_0$，$x_0$ 是 $P$ 中一定元，则 $\mu(P)=0$.

**证明** 由文[2]的定理 4.1 指出，一个有限偏序集 $P$ 是不可约可拆的充要条件为存在 $P$ 的保序映射 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 使 $x\leqslant f_1(x)\geqslant\cdots\leqslant f_n(x)\geqslant x_0$. 特别地，当 $n=1$ 时，即 $x\leqslant f(x)\geqslant x_0$ 时，$P$ 存在不可约元 $x_{i+1}$，这就是说 $x_{i+1}$ 只覆盖一个元 $x_i$，又由引理 1.1，有 $\mu(P)=\mu(P-\{x_{i+1}\})+\mu(\hat{0},x_{i+1})\mu(x_{i+1},\hat{1})$. 设 $P'=\{x\mid\hat{0}<x<x_{i+1}\}$，则 $\mu(\hat{0},x_{i+1})=\mu(P')$，又因为 $P'$ 有最大元 $x_i$，由引理 1.2 知，$\mu(P')=0$.

另一方面，在 $P-\{x_{i+1}\}$ 中，令 $f'(x)=\begin{cases}f(x) & f(x)\neq x_{i+1}\\ x_i & f(x)=x_{i+1}\end{cases}$，则在 $P-\{x_{i+1}\}$ 中仍存在保序映射 $f'$，使 $x\leqslant f'(x)\geqslant x'_0$，$x'_0=\begin{cases}x_0 & x_0\neq x_{i+1}\\ x_i & x_0\neq x_{i+1}\end{cases}$. 故 $\mu(P-\{x_{i+1}\})=0$. 因此 $\mu(P)=0$.

## 2 BACLAWSKI 公式的组合证明

这一节对 BACLAWSKI 的公式 $\mu(P)=\mu(Q)-\sum_{y\in Q}\mu(f/y)\mu(\hat{0},y)$ 给出一个组合证明.

设 $f$ 是偏序集 $P$ 到 $Q$ 的一个保序映射，$y$ 是 $Q$ 中的一个元素，$P$ 的子集 $f/y=\{x\in P\mid f(x)\leqslant y\}$ 与 $y/f=\{x\mid f(x)\geqslant y\}$ 分别称为 $y$ 下的纤维与 $y$ 上的纤维. 为证明第二节的 Brown 定理，需要利用"对任意 $y\in Q$，若 $\mu(y/f)=0$，则 $\mu(P)=\mu(Q)$"这个定理，而此定理是 BACLAWSKI K 公式的一个推论，现在给出 BACLAWSKI 公式的一个组合证明，这就是

**定理 2.1** 设 $f$ 是偏序集 $P$ 到偏序集 $Q$ 的保序映射，则 $\mu(P)=\mu(Q)-\sum_{y\in Q}\mu(y/f)\mu(\hat{0},y)$.

**证明** 对 $Q$ 的元素个数利用数学归纳法. 当 $Q=\{y\}$ 时，$\mu(\hat{0},y)=-1$，$\mu(y/f)=\mu(P)$，$\mu(Q)=0$. 此时有 $\mu(P)=\mu(Q)-\mu(y/f)\mu(\hat{0},y)$. 不妨设当 $Q$ 的元素个数小于 $n$ 时，公式成立.

讨论当 $Q$ 的元素个数为 $n$ 时，设 $y_1$ 是 $Q$ 的一个极小元，则由引理 1.1 得

$\mu(Q)=\mu(Q-\{y_1\})+\mu(\hat{0},y_1)\mu(y_1,\hat{1})=\mu(Q-\{y_1\})-\mu(y_1,\hat{1})$ (*) $(\mu(\hat{0},y_1)=-\mu(\hat{0},\hat{0})=-1)$.

设 $P_1$ 为 $y_1$ 的在保序映射 $f$ 之下的原象的集合，则 $\mu(P)=\mu(P-P_1)-\sum_{x'\in P_1}\mu(x',\hat{1})$（每次都去除极小元）. 同样，在 $y_1$ 上的纤维 $y_1/f$ 中，有 $\mu(y_1/f)=\mu(y_1/f-P_1)-\sum_{x'\in P_1}\mu_{y_1/f}(x',\hat{1})$. 又由于在 $P$ 中，如果 $x'\leqslant x$，$x'P_1$，则 $f(x')\leqslant f(x)$，即 $f(x)\geqslant y$，因此 $x\in y_1/f$，这样有 $\sum_{x'\in P_1}\mu_P(x',\hat{1})=\sum_{x'\in P_1}\mu_{y_1/f}(x',\hat{1})$，所以

$$\mu(P)=\mu(P-P_1)+\mu(y_1/f)-\mu(y_1/f-P_1). \tag{1}$$

下面看偏序集 $P-P_1$ 与偏序集 $Q-\{y_1\}$. 在偏序集 $P-P_1$ 与偏序集 $Q-\{y_1\}$ 中，$f$ 在 $P-P_1$ 上的限制仍是 $P-P_1$ 到 $Q-\{y_1\}$ 的保序映射，仍记为 $f$，由归纳假设得

$$\mu(P-P_1)=\mu(Q-\{y_1\})-\sum_{y\in Q-\{y_1\}}\mu(y/f)\mu(\hat{0},y)$$

代入到(1)式，得到

$$\mu(P)=\mu(Q-\{y_1\})-\sum_{y\in Q-\{y_1\}}\mu(y/f)\mu(0,y)+\mu(y_1/f)-\mu(y_1/f-P_1).$$

又由于 $\mu_Q(\hat{0},y)=\mu_{Q-\{y_1\}}(\hat{0},y)+\mu(\hat{0},y_1)\mu(y_1,y)$ $(y\neq y_1)$. 故

$$\mu(P)=\mu(Q-\{y_1\})-\sum_{y_1<y}\mu(y/f)[\mu_Q(0,y)+\mu(y_1,y)]-$$

$$\sum_{y_1,y\text{无关系}} \mu(y/f)\mu(\hat{0},y) - \mu(y_1/f)\mu(\hat{0},y_1) - \mu(y_1/f-P_1) \doteq$$

$$\mu(Q) - \mu(y_1,\hat{1}) - \sum_{y_1<y}\mu(y/f)\mu(\hat{0},y) - \sum_{y_1<y}\mu(y/f)\mu(y_1,y) -$$

$$\sum_{y_1,y\text{无关系}} \mu(y/f)\mu(\hat{0},y) - \mu(y_1/f)\mu(\hat{0},y_1) - \mu(y_1/f-P_1) =$$

$$\mu(Q) - \sum_{y\in Q}\mu(y/f)\mu(\hat{0},y) - \sum_{y_1<y}\mu(y/f)\mu(y_1,y) - \mu(y_1/f-P_1) + \mu(y_1,\hat{1}). \qquad (2)$$

而在上式的最后 3 项中,令 $P_2=y_1/f-P_1$, $Q_2=(y_1,\hat{1})=\{y|y_1<y<\hat{1}\}$,则 $f$ 在 $P_2$ 上的限制是保序映射,且 $Q_2$ 的个数小于 $n$.由归纳假设得 $\mu(y_1/f-P_1)=\mu(y_1,\hat{1})-\sum_{y_1<y}\mu(y/f)\mu(y_1,y)$. 代入(2)式,得到 $\mu(P)=\mu(Q)-\sum_{y\in Q}\mu(y/f)\mu(\hat{0},y)$. □

由定理 2.1,马上可得到在以后的证明中相应有用的

**推论 2.2** 设 $f$ 是偏序集 $P$ 到 $Q$ 的一个保序映射,$y$ 是 $Q$ 中任一元素,满足 $\mu(y/f)=0$,则 $\mu(P)=\mu(Q)$. 对 $y$ 下的纤维同样成立.

为证明下一节中的 Brown 定理,我们还须做如下的准备工作. 设偏序集 $P$ 与 $Q$ 的笛卡尔乘积 $P\times Q=\{(x,y)|x\in P,y\in Q\}$, $P\times Q$ 上有自然的偏序关系 $(x',y')\leqslant(x,y) \Leftrightarrow x'\leqslant x$ 且 $y'\leqslant y$. 称 $Z$ 是 $P\times Q$ 的一个闭子集,如果 $(x,y)\in Z$ 且 $(x',y')\leqslant(x,y)$ 则 $(x',y')\in Z$. 令 $Z_x=\{y|(x,y)\in Z\}$, $Z_y=\{x|(x,y)\in Z\}$,有

**推论 2.3** 对任意的 $x\in P$, $y\in P$,强果 $\mu(X_x)=\mu(Z_y)=0$,则 $\mu(P)=\mu(Q)=\mu(Z)$.

**证明** 作保序映射 $p_1:\begin{cases}Z\to P\\(x,y)\to x\end{cases}$,则 $x$ 上纤维 $x/P_1=\{(x',y')\in Z|x\leqslant x'\}$. 作保序映射 $v$: $\begin{cases}Z_x\to x/P_1\\y\to(x,y)\end{cases}$,则 $(x,y)$ 纤维 $v/(x,y)=\{y'\in Z_x|y'\leqslant y\}=Z_x$. 由于 $\mu(Z_x)=0$,故 $\mu(v/(x,y))=0$. 由推论 2.2,得 $\mu(Z_x)=\mu(x/P_1)=0$. 再由推论 2.2,得到 $\mu(Z)=\mu(P)$. 同理可证 $\mu(Z)=\mu(Q)$.

## 3 Brown 定理的证明

众所周知,在群论中有如下的 Brown 定理:设 $G$ 是有限群,$P$ 是 $G$ 的 sylow $p$-子群,$|P|=p^n$,则由 $G$ 中所有 $p$-子群按包含关系所组成的链复形的欧拉示性数为 $1+kp^n$. 为证明 Brown 定理,先定义群的一个由包含关系所组成的偏序集. 设 $\varphi_p(G)=\{H|H<G,H$ 是非平凡 $p$-子群$\}$,$\varphi_p(G)$上的偏序关系为群的包含关系. 这样 $\varphi_p(G)$就是由所有的非平凡 $p$-子群按包含关系作成的偏序集.

**命题 3.1** 如果群 $G$ 有非平凡的正规 $p$-子群 $H$,则 $\mu(\varphi_p(G))=0$.

**证明** 由于 $H$ 是 $G$ 的正规子群,所以对 $K<G$,有 $HK<G$. 作映射 $f:\begin{cases}\varphi_p(G)\to\varphi_p(G)\\K\to HK\end{cases}$. 显然 $f$ 是 $\varphi_p(G)$的保序映射,且满足 $K\leqslant f(K)\geqslant H$. 由引理 1.3 得 $\mu(\varphi_p(G))=0$.

**引理 3.2** 设 $Y'=\bigcup_{H\in\varphi_p(P)}|\varphi_p(G)|^H$. 其中

$$|\varphi_p(G)| = \{y_0 < y_1 < \cdots < y_i | y_j \in \varphi_p(G),\ j = 0,1,\cdots,i,\ i \in N\}$$

是 $\varphi_p(G)$的链复形,简记为 $Y$.

$$Y^H = |\varphi_p(G)|^H = \{y_0 < y_1 < \cdots < y_i | \forall\, h \in H,\ h^{-1}y_kh = y_k,\ k = 0,1,\cdots,i\},$$

有 $\mu(Y')=0$.

**证明** 作 $\varphi_p(P)\times Y'$的子集 $Z\subseteq\varphi_p(P)\times Y'$, $Z=\{(H,y)|y\in Y^H\}$. 显然 $Z$ 是 $\varphi_p(P)\times Y'$的闭子集.

(1) $Z_y=\{H\in\varphi_p(P)\mid h^{-1}yh=y,\ \forall\ h\in H\}=\varphi_p(P_y)$.

这里 $P_y$ 是 $y$ 的稳定子,即 $P_y=\{x\in P\mid x^{-1}yx=y\}$. 由于 $P_y$ 是一个 $p$-群,所以 $P_y$ 有非平凡的正规子群,由引理 3.1 知,$\mu(\varphi_p(P_y))=0$,即 $\mu(Z_y)=0$. 因此由推论 2.3 得:$\mu(Z)=\mu(Y')$.

(2) $Z_H=\{y\mid y\in Y^H\}=\{$所有在 $H$ 共轭作用下不变的 $p$-子群链$\}$.

显然,若 $k\in Z_H$,则 $H^{-1}kH=k$,$H^{-1}(Hk)H=kH=Hk$,得 $Hk\in Z_H$. 作保序映射 $f:\begin{cases}Z_H\to Z_H\\ k\to Hk\end{cases}$,有 $k\leqslant f(k)\geqslant H$. 由引理 1.3 知 $\mu(Z_H)=0$. 再由引理 2.3 知,$\mu(Z)=\mu(\varphi_p(P))$. 又因为 $P$ 有非平凡正规子群,由引理 3.1 知,$\mu(\mu_p(P))=0$.

综合(1),(2)得到 $\mu(Y')=0$.

**定理 3.3(Brown 定理)** $X(\mid\varphi_p(G)\mid)\equiv 1$ modul $p^n$.

**证明** 由同调群的长正合链

$$\cdots\to H_i(Y')\to H_i(Y)\to H_i(Y,Y')\to H_{i-1}(Y')\to\cdots$$

得 $\chi(Y)=\chi(Y,Y')+\chi(Y')$. 由 Mobius 函数与欧拉示性数的关系知道 $\chi(Y')=\mu(Y')+1$,而 $\mu(Y')=0$,得 $\chi(Y)=\chi(Y,Y')+1$. 再由链复形

$$\cdots\to C_n(Y)/C_n(Y')\to\cdots\to C_i(Y)/C_i(Y')\to\cdots\to C_0(Y)/C_0(Y').$$

对任取 $x\in C_i(Y)/C_i(Y')$,$x=\{y_0<y_1<\cdots<y_i\}$. 任取 $h\in P$,$h^{-1}xh=\{h^{-1}y_ih<\cdots<h^{-1}y_ih\}\neq x$. 因此 $P$ 作用在 $x\in C_i(Y)/C_i(Y')$ 上是自由的,不妨设 $S$ 是 $Y$ 中所有 $i$ 维链的集合,$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$,则 $P^{-1}SP=\{P^{-1}x_1P,\cdots,P^{-1}x_tP\}$,而 $P^{-1}x_jP$ 中 $i$ 维链的个数为 $p^n$,所以每项都是 $p^n$ 的倍数,其交错和(欧拉示性数)$X(Y,Y')$ 也是 $p^n$ 的倍数. 因此有 $\chi(Y,Y')\equiv 0$ modul $p^n$. 故有 $\chi(Y)\equiv 1$ module $p^n$,即 $\chi(\mid\varphi_p(G)\mid)\equiv 1$ module $p^n$.

**注记 3.4** 在证明 Brown 定理过程中所用到有关 Mobius 函数计算都是初等的,所以给出了 Brown 定理的一个组合证明.

## 参考文献:

[1] QUILLEN D. Homotopy Properties of the Poset of Nontrivial $p$-Subgroups of a Group[J]. Advance in Math, 1978, 28: 129-137.

[2] BACLAWSKI K. Galois Connection and Leray Spectral Sequences[J]. Advance in Math, 1977, 25: 191-215.

[3] STANLEY R. Enumberative Combinatorics[M]. Wadsworth and Broods/cole Monterey CA, 1986.

[4] BACLAWSKI K, BJORNER A. Fixed Poset in Partially Order Sets[J]. Advances in Math, 1979, 31: 263-287.

## A Combinatorial Proof of the Brown Theorem

SONG Chuan-ning

(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

**Abstract**: QUILLEN used methods of algebraic topology to prove the Brown Theorem. BACLAWSKI used the same theory to obtain a formula $\mu(P)=\mu(Q)-\sum_{y\in Q}\mu(y/f)\mu(\hat{0},y)$. This paper offers a combinatorial proof of the formula and uses the same methods to prove the Brown Theorem.

**Key words**: Brown Theorem; Mobius fuction; fiber