



LURIE 控制系统的时滞相关绝对稳定性判据¹⁾

徐炳吉 廖晓昕

(华中科技大学控制科学与工程系 武汉 430074)

关键词 Lurie 控制系统, 绝对稳定性, Razumikhin 定理

中图分类号 TP13, TP202

ABSOLUTE STABILITY CRITERIA OF DELAY-DEPENDENT FOR LURIE CONTROL SYSTEMS

XU Bing-Ji LIAO Xiao-Xin

(Department of Control Science & Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Key words Lurie control system, absolute stability, Razumikhin theorem

1 引言

关于具有时滞的 Lurie 控制系统的绝对稳定性的讨论已有不少结果^[1~4], 其绝对稳定性条件有时滞无关条件和时滞相关条件两种. 由于时滞无关条件缺少了时滞的信息, 因此必然会使其稳定性具有保守性. 下面对具有多个时变时滞的 Lurie 控制系统, 利用不同于文献[1]的方法进行讨论, 给出系统绝对稳定的时滞相关判据. 算例表明, 与文献[1]的结果相比本文结果可降低保守性.

2 主要结论

考虑如下具有多个时变时滞的 Lurie 控制系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^m B_i \mathbf{x}(t - \tau_i(t)) + \mathbf{b}f(\sigma(t)), \\ \sigma(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中实向量函数 $\mathbf{x}(t) \in R^n$, 实矩阵 $A, B_i \in R^{n \times n} (i=1, 2, \dots, m)$ 向量 $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n$, 时变连续函数 $\tau_i(t)$ 满足条件 $0 < \tau_i(t) \leq \tau (i=1, 2, \dots, m)$, $f(\cdot) \in F_{[0, k]} = \{f(\cdot) | f(0) = 0, 0 < \sigma f(\sigma) \leq k\}$

1) 国家自然科学基金(60074008)及高等学校博士学科点专项基金(97048722)资助

收稿日期 1999-11-02 收修改稿日期 2000-09-06

$k\sigma^2$, $\sigma \neq 0$, $f(\cdot)$ 连续}.

文中约定:对任意矩阵 A , $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, $\lambda_{\max}(P)$ 及 $\lambda_{\min}(P)$ 分别为矩阵 P 的最大、最小特征值;对任意向量 \mathbf{y} , $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}$.

定理 1. 若 1) 矩阵 $A_0 = A + \sum_{i=1}^m B_i$ 渐近稳定;

2) 正定矩阵 P, Q 满足

$$A_0^T P + P A_0 = -Q \quad (2)$$

$$3) \tau < \frac{\lambda_{\min}(Q - \epsilon P^2) - \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2}{\epsilon(m+2) \sum_{i=1}^m \|PB_i\|^2 + \frac{m\alpha^2}{\epsilon} (\|A\|^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2)} \quad (3)$$

其中

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \beta}}{2\|Q^{-\frac{1}{2}}P\|^2} < \epsilon < \frac{1 + \sqrt{1 - \beta}}{2\|Q^{-\frac{1}{2}}P\|^2} \quad (4)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \quad \beta = \frac{4\|Q^{-\frac{1}{2}}P\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2}{\lambda_{\min}(Q)} \quad (5)$$

则系统(1)绝对稳定.

证明. 将式(1)化为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0 \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^m B_i \int_{t-\tau_i(t)}^t [A \mathbf{x}(s) + \sum_{j=1}^m B_j \mathbf{x}(s - \tau_j(s)) + \mathbf{b}f(\sigma(s))] ds + \mathbf{b}f(\sigma(t)) \quad (6)$$

取 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

则沿式(6)的任一解关于 t 求导,有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(6)} &= -2\mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) P \mathbf{b}f(\sigma(t)) - \\ &2 \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i(t)}^t [\mathbf{x}^T(t) P B_i A \mathbf{x}(s) + \sum_{j=1}^m \mathbf{x}^T(t) P B_i B_j \mathbf{x}(s - \tau_j(s)) + \mathbf{x}^T(t) P B_i \mathbf{b}f(\sigma(s))] ds \end{aligned} \quad (8)$$

由式(7)及 Razumikhin 定理,假定对任意实数 $q > 1$, $V(\mathbf{x}(\xi)) < q^2 V(\mathbf{x}(t))$, $t - 2\tau \leq \xi \leq t$, 则 $\|\mathbf{x}(\xi)\| \leq qa \|\mathbf{x}(t)\|$, 利用向量不等式 $2\mathbf{u}^T \mathbf{v} \leq \epsilon \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{v}^T \mathbf{v}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ ($\epsilon > 0$ 为任意实数), 我们有

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}^T(t) P \mathbf{b}f(\sigma(t)) &\leq \epsilon \mathbf{x}^T(t) P P \mathbf{x}(t) + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{b}^T \mathbf{b} f^2(\sigma(t)) \leq \\ &\epsilon \mathbf{x}^T(t) P^2 \mathbf{x}(t) + \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 \|\mathbf{x}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$-2 \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i(t)}^t [\mathbf{x}^T(t) P B_i A \mathbf{x}(s) + \sum_{j=1}^m \mathbf{x}^T(t) P B_i B_j \mathbf{x}(s - \tau_j(s)) + \mathbf{x}^T(t) P B_i \mathbf{b}f(\sigma(s))] ds \leq$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i(t)}^t \left\{ 2\epsilon \mathbf{x}^T(t) P B_i (P B_i)^T \mathbf{x}(t) + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{x}^T(s) A^T A \mathbf{x}(s) + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{b}^T \mathbf{b} f^2(\sigma(t)) + \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^m \left[\epsilon \mathbf{x}^T(t) P B_i (P B_i)^T \mathbf{x}(t) + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{x}^T(s-\tau_j(s)) B_j^T B_j \mathbf{x}(s-\tau_j(s)) \right] \right\} ds \leq \\ & \sum_{i=1}^m \tau \left[\epsilon(m+2) \|P B_i\|^2 \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \frac{q^2 \alpha^2}{\epsilon} \left(\|A\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 + \sum_{j=1}^m \|B_j\|^2 \right) \|\mathbf{x}(t)\|^2 \right] = \\ & \tau \left[\epsilon(m+2) \sum_{i=1}^m \|P B_i\|^2 + \frac{mq^2 \alpha^2}{\epsilon} \left(\|A\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 \right) \right] \|\mathbf{x}(t)\|^2 \quad (10) \end{aligned}$$

将式(9),式(10)代入式(8)得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(6)} & \leq - \left[\lambda_{\min}(Q - \epsilon P^2) - \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 \right] \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \tau \left[\epsilon(m+2) \sum_{i=1}^m \|P B_i\|^2 + \right. \\ & \left. \frac{mq^2 \alpha^2}{\epsilon} \left(\|A\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 \right) \right] \|\mathbf{x}(t)\|^2 = -\omega \|\mathbf{x}(t)\|^2 \quad (11) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \omega & = \lambda_{\min}(Q - \epsilon P^2) - \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 - \\ & \tau \left[\epsilon(m+2) \sum_{i=1}^m \|P B_i\|^2 + \frac{mq^2 \alpha^2}{\epsilon} \left(\|A\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

若式(3)成立,则必存在常数 $q > 1$ 使得 $\omega > 0$,由文献[5]中定理 4.2 知,系统(1)绝对稳定. 证毕.

定理 2. 若 1) 矩阵 $A_0 = A + \sum_{i=1}^m B_i$ 渐近稳定;

2) 正定矩阵 P, Q 满足 $A_0^T P + P A_0 = -Q$;

3) $\tau < T =$

$$\frac{\lambda_{\min}^2(Q) M \rho - 2 \|P\|^2 [(LM - N \|P\|^2)(LM - N \|P\|^2 + \rho) + MN \lambda_{\min}^2(Q)]}{2M [(LM - N \|P\|^2)(LM - N \|P\|^2 + \rho) + MN \lambda_{\min}^2(Q)]} \quad (12)$$

其中

$$L = \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2, \quad M = (m+2) \sum_{i=1}^m \|P B_i\|^2 \quad (13a)$$

$$N = m \alpha^2 \left(\|A\|^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 \right) \quad (13b)$$

$$\rho = \sqrt{(LM - N \|P\|^2)^2 + MN \lambda_{\min}^2(Q)} \quad (13c)$$

则系统(1)绝对稳定.

证明. 令

$$g(\epsilon) = \frac{\lambda_{\min}(Q) - \epsilon \|P\|^2 - \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2}{\epsilon(m+2) \sum_{i=1}^m \|P B_i\|^2 + \frac{mq^2 \alpha^2}{\epsilon} \left(\|A\|^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 \right)},$$

$$T(\epsilon) = \frac{\lambda_{\min}(Q - \epsilon P^2) - \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2}{\epsilon(m+2) \sum_{i=1}^m \|P B_i\|^2 + \frac{mq^2 \alpha^2}{\epsilon} \left(\|A\|^2 + \sum_{i=1}^m \|B_i\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 \|\mathbf{c}\|^2 k^2 \right)},$$

则 $g(\epsilon) \leq T(\epsilon)$, 故由定理 1 知, 当 $\tau < g(\epsilon)$ 时系统(1)绝对稳定.

由 $g'(\epsilon) = 0$, 得 $\epsilon_0 = \frac{LM - N \|P\|^2 + \rho}{M\lambda_{\min}(Q)}$, 因 $g''(\epsilon_0) < 0$, 故 $g(\epsilon)$ 在 $\epsilon = \epsilon_0$ 处取得最大值 $g(\epsilon_0) = T$, 因此定理结论成立. 证毕.

3 例

考虑如下时滞 Lurie 型控制系统^[1]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 & -0.5 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix} f(\sigma(t)),$$

$$\sigma(t) = 0.6x_1(t) + 0.8x_2(t), f \in F_{[0,0.5]}.$$

取 $P=I$ 则 $\alpha=1$, $Q = \begin{bmatrix} 4.4 & 1 \\ 1 & 4.4 \end{bmatrix}$, $\lambda_{\min}(Q) = 3.4$, 由定理 1 可得 $0.0096 < \epsilon < 3.3904$,

取 $\epsilon=1.33$ 得 $\tau < 0.3230$; 由定理 2 得 $\tau < 0.3230$, 而文献[1]的结果为 $\tau < 0.3053$.

若取 $Q=I$ 则 $\alpha=1.5880$, $P = \begin{bmatrix} 0.23965 & -0.05446 \\ -0.05446 & 0.23965 \end{bmatrix}$, $\lambda_{\min}(Q) = 1$. 由定理 1 可得 $0.0326 < \epsilon < 11.5281$, 取 $\epsilon=4.8$ 得 $\tau < 0.2190$; 由定理 2 得 $\tau < 0.2191$. 而由文献[1]得 $\tau < 0.0800$, 可见本文的结果较文献[1]具有更低的保守性.

4 结论

本文基于 Razumikhin 定理与向量不等式的方法, 得到了具有多个时变时滞的 Lurie 控制系统的时滞相关绝对稳定性判据. 算例表明与文献[1]的结果比较, 利用本文的稳定性判据可给出时滞界限较高的估计.

参 考 文 献

- 1 年晓红. Lurie 控制系统绝对稳定的时滞相关条件. 自动化学报, 1999, **25**(4): 564~566
- 2 Wang P G. Absolute stability of Lurie indirect control systems with delay-time. *Advances in Modelling & Simulation*, 1992, **29**(3): 43~49
- 3 Somolines A. Stability of Lurie-type functional equations. *J. Differential Equations*, 1977, **26**(2): 191~199
- 4 Liao X X. Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. Kluwer Academic Publishers, 1993
- 5 Hale J K. Theory of Functional Differential Equation. New York: Springer-Verlag, 1977

徐炳吉 副教授, 博士. 主要研究方向为非线性控制及稳定性.

廖晓昕 教授, 博士生导师. 主要研究方向为神经网络及非线性控制.