

LQ 最优控制系统中加权阵的确定

王耀青

(浙江大学能源工程系, 杭州 310027)

摘要

本文研究了 LQ 最优调节器的逆问题。在控制变量加权矩阵 R 给定的条件下, 通过引入一组自由变量, 给出了满足闭环系统特征值要求的状态加权矩阵 Q 的一种参数化表示结果。基于这种结果, 研究了 LQ 逆问题的矩阵变换解法和一类系统的 LQ 逆问题的解法。此外, 文中还给出了不求解代数矩阵 Riccati 方程确定系统的最优状态反馈系数矩阵 K 的方法。

关键词: 最优控制, LQ 逆问题, 加权矩阵。

一、引言

LQ 最优调节器逆问题研究的内容是如何确定 LQ 最优控制问题

$$\begin{cases} J = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] d\tau & (1) \\ \dot{x} = Ax + Bu & (2) \end{cases}$$

中的加权矩阵 Q 和 R , 使闭环控制系统

$$\dot{x} = (A - BK)x, \quad K = R^{-1}B^T P, \quad (3a, b)$$

的特征值为期望值 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 。式中的矩阵均为适当的维数。此外, 矩阵 P 是方程

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4)$$

的唯一对称正定解。

对 LQ 逆问题进行研究的方法很多, 例如参考文献[1]。但研究多基于数值迭代求解方法。本文将研究 LQ 逆问题的显式代数解法和矩阵变换解法, 并附有算例, 用以说明这些方法的有效性。

二、主要结论

为了保证 LQ 逆问题解的存在性, 定义系统(2)的最优闭环极点的集合为 $C_{opt}^- = \{s \in \mathbf{C} | s \in \lambda(A - BK), K = R^{-1}B^T P, A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0; \forall Q = Q^T \geq 0, \forall R = R^T > 0\}$ 。其中 $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵 \bullet 的全部特征值的集合, 并假定 $\lambda_i \in C_{opt}^-$,

$i = 1, 2, \dots, n$. 关于 $\lambda_i \in \mathbf{C}_{o_{pt}}^-$ 的条件, 可以参阅文献[2-3]. 此外, 文中还将定义

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \alpha(\lambda_i)\alpha(-\lambda_i), \quad C = (B \ AB \cdots A^{n-1}B), \\ \phi_i &= CH\Lambda_i^+(\Lambda_i^-)^T HC^T \triangleq \phi_i^+(\phi_i^-)^T, \\ \Lambda_i^\pm &= [I_m \ \pm \lambda_i I_m \cdots (\pm \lambda_i)^{n-1} I_m]^T,\end{aligned}$$

其中 $H =$ 第一行为 $[a_1 I_m, \dots, a_n I_m]$ 的左上三角 Toeplitz 矩阵, $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为系统(2)的开环特征多项式

$$\alpha(s) = \det(sI_n - A) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (5)$$

的系数; I_τ 为 $\tau \times \tau$ 维的单位矩阵. 后文将以 I 来代替 I_τ .

定理 1. 考虑由(1)–(4)所定义的 LQ 逆问题, 如果取 $R = I$, 则满足 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 要求的矩阵 Q 可以参数化表示为

$$Q = -(\alpha_1 \xi_1 \ \alpha_2 \xi_2 \cdots \alpha_n \xi_n)(\phi_1 \xi_1 \ \phi_2 \xi_2 \cdots \phi_n \xi_n)^{-1} \quad (6)$$

的充分必要条件为

i) (3a, b) 式的特征值为 $\lambda_i, \lambda_i \in \mathbf{C}_{o_{pt}}^-, i = 1, 2, \dots, n$ 且 λ_i 的几何重根个数等于其代数重根个数;

ii) 当 $\lambda_i \in \lambda(\pm A)$ 时, A 的特征值集合 $\{\lambda_{oi}\}_{i=1}^n$ 中的某个 $\lambda_{oi}, \lambda_{oi} = \lambda_i$ 或 $\lambda_{oi} = -\lambda_i$ 的几何重根个数为 1.

式中 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ 的选取使得 $Q = Q^T \geq 0$, $\{\phi_i \xi_i\}_{i=1}^n$ 在 \mathbf{C}^n 上线性独立, 且当 $\lambda_i = \lambda_j^*$ 时 $\xi_i = \xi_j^*$ (* 表示复数共轭).

推论 1. 式(3b)可以表示为

$$K = -[\alpha(\lambda_1)V_1 \cdots \alpha(\lambda_n)V_n][X_1 \cdots X_n]^{-1}, \quad (7)$$

式中

$$V_i = \alpha(-\lambda_i)B^T(-\lambda_i I - A^T)^{-1}\xi_i = (\phi_i^-)^T \xi_i, \quad (8)$$

$$X_i = \alpha(\lambda_i)(\lambda_i I - A)^{-1}BV_i = \phi_i^+ V_i = \phi_i \xi_i. \quad (9)$$

由上述结论可知, 求 LQ 逆问题解的关键问题是求解 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$. 下面将是一些具体解法.

引理 1. LQ 逆问题有解 $R = R^T > 0, Q = D^T D, D \in \mathbf{R}^{1 \times n}$, 的充分必要条件是

i) (2) 式的特征值 $\{\lambda_{oi}\}_{i=1}^n$ 的几何重根个数为 1;

ii) λ_i 满足 $\lambda_i = \lambda_j, i \neq j, \lambda_i \in \mathbf{C}_{o_{pt}}^-, i, j = 1, 2, \dots, n$.

定理 2. 如果 $\{\lambda_{oi}\}_{i=1}^n$ 的几何重根个数为 1, 且 $\lambda_i \in \mathbf{C}_{o_{pt}}^-, \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, 则满足 λ_i 要求的加权矩阵 Q 可以由以下方程来确定:

$$Q = D^T D, \quad D \in \mathbf{R}^{1 \times n}, \quad (10)$$

其中矩阵 D 是方程

$$D\phi_i D^T = -\alpha_i, \quad \lambda_i \in \lambda(\pm A), \quad (11)$$

$$D\phi_j \xi_j = 0, \quad \lambda_j \in \lambda(\pm A), \quad \forall \xi_j \text{ 使得 } \phi_j \xi_j \neq 0 \quad (12)$$

的解, 式中 $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$.

根据定理 2, 如果要求 K , 则令

$$\xi_i = k_i D^T, \quad k_i \neq 0, \quad \lambda_i \in \lambda(\pm A), \quad (13)$$

结合(12)式, 由(7)–(9)式就可以达到目的.

引理 2. 1) $\{\phi_i \xi_i\}_{i=1}^n$ 在 \mathbf{C}^n 上线性独立的充分条件是矩阵对 (Q, A) 可观; 2) $(Q,$

A) 可观的充分条件是 $\lambda_i \in \lambda(\pm A)$, 且存在某个矩阵 $Q, Q = Q^T \geq 0$.

根据引理 2, 为了简化定理 1 的约束条件, 下文将假定 $\lambda_i \in \lambda(\pm A), \lambda_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n$, 并给出矩阵 Q 的一种构造解法.

定义

$$T_l = \prod_{i=0}^l \tilde{T}_i, \quad l = 1, 2, \dots, n-1, \quad \tilde{T}_0 = I, \tag{14}$$

$$T_l^T [-\alpha_i^{-1} \phi_i] T_l = \tilde{\phi}_i^l = \{\phi_{kj}^l, k, j = 1, 2, \dots, n\}, \tag{15}$$

取

$$\tilde{T}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & x_l & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & x_{l+1} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

若变量 $\{x_1, x_2, \dots, x_{l+1}\}^T$ 为齐次线性方程组

$$(A_l - B_l)(x_1, x_2, \dots, x_{l+1})^T = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n-1. \tag{17}$$

$$A_l = \begin{bmatrix} \phi_1^{l-1} & \dots & \phi_{l+1}^{l+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{l-1} & \dots & \phi_{l+1}^{l+1} \end{bmatrix}, \quad B_l = \begin{bmatrix} \phi_1^{l-1} & \dots & \phi_{l+1}^{l+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{l-1} & \dots & \phi_{l+1}^{l+1} \end{bmatrix}$$

的解, 则 $\phi_{kj}^l, i, j, k = 1, 2, \dots, n$, 满足

$$\phi_{k+1}^l = \phi_{k+1}^{l+1}, \quad k, j = 1, 2, \dots, l; \quad l = 1, 2, \dots, n-1$$

此时, 只要定义 $T = T_{n-1} = \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{T}_i; \tilde{\phi}_i = -\alpha_i^{-1} T^T \phi_i T = \{\phi_{kj}^i, k, j = 1, 2, \dots, n\},$

$i = 1, 2, \dots, n$, 并构造一对称矩阵 Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11}^1 & \phi_{21}^1 & \dots & \phi_{n1}^1 \\ \phi_{21}^1 & \phi_{22}^2 & \dots & \phi_{n2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1}^1 & \phi_{n2}^2 & \dots & \phi_{nn}^n \end{bmatrix},$$

则当 $\Phi > 0$ 时, 就可以求得 LQ 逆问题的解

$$Q = T\Phi^{-1}T^T, \quad (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = T. \tag{18a, b}$$

大量的计算表明矩阵 $\Phi > 0$ 的存在性.

由 T 的构造过程可知, 影响 Q 的因素是 $\{\phi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 的排列次序. 因此, 对于同一个问题最多可以求得 $n!$ 个不同的加权矩阵 Q , 它们均能够满足 λ_i 的要求. 下面将举例加以说明.

例. 考虑一线性时不变可控系统 $\dot{x} = Ax + Bu$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取 $R = I$, $[\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -4]$. 求矩阵 Q 及 K .

解. 在本例中, 由(11)式得

$$\begin{cases} 8x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 8x_1x_3 = 24 \\ 169x_1^2 + 63x_2^2 - 112x_3^2 + 104x_1x_3 = 1352 \\ 25x_1^2 + 14x_2^2 - 14x_3^2 + 10x_1x_3 = 375 \end{cases}$$

该方程的解为 $(x_1 \ x_2 \ x_3) = \pm(1.093 \pm 5.900 \ 3.601)$. 从而有 $Q = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T(x_1 \ x_2 \ x_3)$.

另一方面, 由(13)式, 以及(7)–(9)式可以求得

$$K = \begin{bmatrix} 0.661 & 1.660 & 0.288 \\ 1.660 & 7.339 & 2.726 \end{bmatrix} \text{ 和(或) } K = \begin{bmatrix} 0.785 & 0.899 & 1.831 \\ 0.899 & 7.215 & 2.258 \end{bmatrix},$$

若利用(14)–(18)式所给出的算法, 则有

$$\tilde{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.539 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.281 \\ 0 & 1 & 9.495 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T = T_2 = \tilde{T}_1 \tilde{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.539 & 2.939 \\ 0 & 1 & 9.695 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q = T\Phi^{-1}T^T = \begin{bmatrix} 4.181 & 3.752 & -4.860 \\ 3.752 & 31.834 & 8.420 \\ -0.486 & 8.420 & 5.182 \end{bmatrix},$$

再由(18b), (7)–(9)式可以求得

$$K = \begin{bmatrix} 1.485 & 0.913 & -0.519 \\ 0.913 & 6.516 & 1.433 \end{bmatrix}.$$

此外, 限于篇幅, 略去 $\{\phi_i, i = 1, 2, 3\}$ 的另外五种组合情况下的结果.

三、结 束 语

本文在研究了 LQ 逆问题解的参数化表示的基础上, 给出了 LQ 逆问题解的具体解法. 尽管文中没有证明矩阵 Φ 的正定性问题, 但大量的计算表明, 本文所给出的方法是十分有效的, 具有系统性和简便性等特点.

参 考 文 献

- [1] Johnson, M. A. and Grimble, M. J., Recent Trends in Linear Optimal Quadratic Multivariable Control System Design, *IEE. Proc.*, 134(1987), 1, 53.
- [2] Lee, T. T. and Liaw, G. T., The Inverse Problem of Linear Optimal Control for Constant Disturbance, *Int. J. Control*, 43(1986), 2, 233.
- [3] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Linear Optimal Control, Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall (1971).

THE DETERMINATION OF WEIGHTING MATRICES IN LQ OPTIMAL CONTROL SYSTEMS

WANG YAOQING

(Institute of Thermopower Engineering, Zhejiang University, 310072)

ABSTRACT

This paper is a study on the inverse problem of LQ optimal regulators. With the control weight given, the state weighting matrix satisfying the closed-loop eigenvalue requirements is parametrized in terms of a set of free variables. Based on the parametrization, an analytic procedure and a matrix transformation method are proposed to determine the state weighting matrix, as well as the free variables. As a result, by using the solved free variables, the optimal controller gain matrix can be determined without solving the algebraic Riccati matrix equation.

Key words: Optimal control; LQ inverse problem; weighting matrices.