第18卷 第4期　　自动化学报　　Vol. 18, No. 4
1992年7月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1992

短文

LQ逆问题研究

李人厚
（西安交通大学信控系，710049）
谢宋和　朱荣华
（郑州轻工业学院控制系，450002）

摘　要

本文研究了线性定常系统 LQ 逆问题解的存在性问题，给出了逆问题解的参数化公式，得到了加权矩阵 Q 与开环、闭环特征多项式系数之间的解析关系. 只要给定一组稳定的闭环极点，即可确定与之对应的 Q 阵.

关键词: LQ 逆问题，加权矩阵，特征多项式.

一、前　言

所谓 LQ 逆问题[1]指的是: 对于已知的线性系统 (A, B)，给定状态反馈增益 F 使 $(A-BF)$ 具有指定的稳定极点，求加权矩阵 Q 和 R，使 F 成为系统 (A, B) 对应于二次型性能指标

$$J=\int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u})\mathrm{d}t, \tag{1}$$

或

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}[\boldsymbol{x}^T(k)Q\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}^T(k)R\boldsymbol{u}(k)] \tag{2}$$

的最优反馈增益矩阵. 具体而言，LQ 逆问题包括两个主要内容: 首先，给定的 A 和 B 以及 F 满足什么条件，逆问题有解，即存在 $Q\geqslant 0$，$R>0$；其次，若解存在，如何确定 Q 和 R.

本文研究了 LQ 逆问题解的存在性和非唯一性问题，提出了一种确定 Q 和 R 的新方法——参数化方法. 这种方法是一种解析方法，不必求解 Riccati 方程，非常简单.

本文于1990年12月27日.

二、连续系统 LQ 逆问题研究

由最优控制理论知[2]：使性能指标(1)极小的最优控制规律为

$$\boldsymbol{u} = -F\boldsymbol{x}, \ F = R^{-1}B^TP, \tag{3}$$

且 P 为矩阵代数 Riccati 方程

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \tag{4}$$

的实对称非负定解.

令

$$P_0(s) = \det(sI_n - A) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_{oi}) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i, \quad a_n = 1,$$

$$P_c(s) = \det(sI_n - A + BF) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_{ci}) = \sum_{i=0}^{n} b_i s^i, \ b_n = 1.$$

定理 1. 若 $\lambda_{oi}, \lambda_{ci}(i = 1,2,\cdots,n)$ 分别是系统的开环极点和最优闭环极点，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ci}^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^2, \qquad \prod_{i=1}^{n}|\lambda_{ci}| \geqslant \prod_{i=1}^{n}|\lambda_{0i}|. \tag{5}$$

定理 1 说明，只有当预先指定的稳定闭环极点满足(5)式时，其对应的状态反馈才有可能构成最优系统. 换句话说，(5)式是 LQ 逆问题解存在的必要条件，它为选择合适的稳定闭环极点提供了一个重要的理论依据(证明见附录).

定理 2. 使闭环系统具有指定的稳定极点 λ_{ci} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的加权矩阵 Q 可以参数化表示为

$$Q = -(A^TT_2 + T_2S)T_1^{-1}, \tag{6}$$

式中 S 是一个特征值为 λ_{ci} 的实数矩阵，且参数阵 T_1 和 T_2 满足以下条件:

1) T_1 是非奇异阵·

2) T_1 和 T_2 满足矩阵方程

$$AT_1 - T_1S = BR^{-1}B^TT_2 \ (R > 0); \tag{7}$$

3) (6)式定义的 $Q \geqslant 0$.

定理 3. 对于单输入可控系统 (A, b) 而言，使对应的闭环系统具有指定的稳定极点 λ_{ci} 的加权矩阵 Q 可以表示为

$$Q = C^T\bar{Q}C \ (R = 1), \tag{8}$$

式中 C 是可控标准形变换矩阵，$\bar{Q}_{ij} = b_{i-1}b_{j-1} - a_{i-1}a_{j-1} - t_{j,i-1} - t_{i,j-1}$，且 $t_{i,j} = t_{j,i}$，当 i 或 $j \leqslant 0$ 时，$t_{i,j} = 0$；当 $0 < i$ 和 $j < n$ 时，$t_{i,j}$ 为自由参数；当 i 或 $j = n$ 时，有

$$t_{n,i} = t_{i,n} = b_{i-1} - a_{i-1}, \ (i = 1,2,\cdots,n).$$

定理 4. 对于单输入可控系统 (A,b) 来说，LQ 逆问题的解存在的充分条件是

$$b_{i-1}^2 - a_{i-1}^2 + 2\sum_{m=1}^{i}(-1)^m(b_{i-m-1}b_{i+m-1} - a_{i-m-1}a_{i+m-1}) \geqslant 0, \tag{9}$$

式中 $i = 1, 2, \cdots, n$，且当 $j > n$ 时，$a_j = 0$，$b_j = 0$.

以上定理的证明见附录.

三、离散系统 LQ 逆问题研究

对于离散系统(A,B)而言，使性能指标(2)极小的最优控制为

$$\boldsymbol{u}(k)=-F\boldsymbol{x}(k),\quad F=(R+B^TPB)^{-1}B^TPA, \tag{10}$$

式中 P 为代数 Riccati 方程

$$P=A^TPA-A^TPB(R+B^TPB)^{-1}B^TPA+Q \tag{11}$$

的实对称非负定解. 令

$$P_0(z)=\det(zI_n-A)=\prod_{i=1}^{n}(z-\lambda_{oi})=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i,\ a_n=1,$$

$$P_c(z)=\det(zI_n-A+BF)=\prod_{i=1}^{n}(z-\lambda_{ci})=\sum_{i=0}^{n}b_iz^i,\ b_n=1.$$

定理 5. 如果 $\lambda_{oi}, \lambda_{ci}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是系统 (A,B) 的开环极点和对应的最优闭环极点，则有下述不等式成立：

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_{oi}\Big/\prod_{i=1}^{n}\lambda_{ci}\geqslant 1,\ 0<\prod_{i=1}^{n}\lambda_{oi}\lambda_{ci}\leqslant 1. \tag{12}$$

显然，对于指定的稳定极点 λ_{ci}，它必须满足不等式(12)，其对应的状态反馈才有可能成为最优反馈. 因此，此不等式是 LQ 逆问题解存在的必要条件.

定理 6. 若 a_i, $b_i(i=0,1,\cdots,n)$ 分别是系统 (A,B) 的开环特征多项式系数和对应的最优闭环特征多项式系数，则有

$$\frac{a_0}{b_0}\sum_{i=0}^{n}b_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2. \tag{13}$$

不等式(12)和(13)为选择适当的稳定闭环极点提供了一个重要的前提条件.

定理 7. 使闭环系统矩阵 $(A-BF)$ 具有指定的稳定极点 $\lambda_{ci}(i=1,2,\cdots,n)$ 的加权矩阵 Q 可以参数化表示为

$$Q=T_2T_1^{-1}-A^TT_2ST_1^{-1}, \tag{14}$$

式中矩阵 S 是一个特征值分别为 λ_{ci} 的实数矩阵，且参数阵 T_1 和 T_2 满足以下约束条件：

1) T_1 是非奇异矩阵；

2) T_1 和 T_2 满足矩阵方程；

$$AT_1-T_1S=BR^{-1}B^TT_2S,\ (R>0); \tag{15}$$

3) 由 T_1 和 T_2 确定的 $Q\geqslant 0$.

定理 8. 对于单输入可控系统 (A,b)，使对应的闭环系统具有预先指定的稳定极点 λ_{ci} 的加权矩阵 Q 可以表示为

$$Q=C^T\bar{Q}C\ (R=1), \tag{16}$$

其中 C 为可控标准形变换矩阵，$\bar{Q}$ 满足

$$\bar{Q}_{ij}=t_{i,j}-t_{i-1,j-1}+\frac{a_0}{b_0}b_{i-1}b_{j-1}-a_{i-1}a_{j-1}, \tag{17}$$

式中 $t_{i,j}=t_{j,i}$，且当 i 或 $j\leqslant 0$ 时，$t_{i,j}=0$；当 $0<i$ 和 $j<n$ 时，$t_{i,j}$ 为自由参数；当

i 或 $j=n$ 时，有

$$t_{n,i}=t_{i,n}=a_0b_i/b_0-a_i\ (i=1,2,\cdots,n). \tag{18}$$

定理 9. 对于单输入可控系统(A,b)，LQ 逆问题的解存在的充分条件是：(19)式确定的 $Q\geqslant 0$.

$$Q=Q^T=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \cdots & \bar{Q}_{1n}\\ & \bar{Q}_{11} & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \bar{Q}_{12}\\ & & & \bar{Q}_{11}\end{bmatrix}, \tag{19}$$

式中

$$\bar{Q}_{1i}=\left[\frac{a_0b_{n-i+1}}{b_0}-a_{n-i+1}+\sum_{j=1}^{n-i+1}\left(\frac{a_0}{b_0}b_{j-1}b_{i+j-2}-a_{j-1}a_{i+j-2}\right)\right]\Big/(n-i+1),\ i=1,2,\cdots,n.$$

四、例　子[3]

已知某连续系统为

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{20}$$

若指定的闭环极点分别为$-2\pm j$和-3，则对应的特征多项式系数为

$$b_0=15,\ b_1=17,\ b_2=7,\ b_3=1.$$

根据定理 3，当取 $t_{1,1}=255,\ t_{1,2}=105,\ t_{2,2}=98$ 时，有

$$Q=\begin{bmatrix}165 & -105 & -30\\ -105 & 310 & 10\\ -30 & 10 & 10\end{bmatrix}>0. \tag{21}$$

当取 $t_{1,1}=255,\ t_{1,2}=100,\ t_{2,2}=98$ 时，有

$$Q=\begin{bmatrix}175 & -130 & -30\\ -130 & 330 & 15\\ -30 & 15 & 10\end{bmatrix}>0. \tag{22}$$

不难验证：由(21)式和(22)式 Q 阵确定的最优状态反馈增益均为

$$F=[3\quad 4\quad 4]. \tag{23}$$

附　录

定理 1 的证明.

由文献[2]知：F 是最优反馈增益矩阵的充分必要条件为

$$[I_m+R^{1/2}F(-j\omega I_n-A)^{-1}BR^{-1/2}]^T[I_m+R^{1/2}F(j\omega I_n-A)^{-1}BR^{-1/2}]\geqslant I_m. \tag{A1}$$

式(A1)两边同时取行列式，根据矩阵理论有

$$P_c(j\omega)P_c(-j\omega)/P_0(j\omega)P_0(-j\omega)\geqslant 1,\ \omega\in R, \tag{A2}$$

即

$$P_c(j\omega)P_c(-j\omega)-P_0(j\omega)P_0(-j\omega)\geqslant 0,\ \omega\in R. \tag{A3}$$

又

$$\begin{aligned}\Phi(\omega^2)&=P_c(j\omega)P_c(-j\omega)-P_0(j\omega)P_0(-j\omega)\\&=\prod_{i=1}^{n}(\omega^2+\lambda_{ci}^2)-\prod_{i=1}^{n}(\omega^2+\lambda_{0i}^2)\\&=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{ci}^2-\lambda_{0i}^2)\omega^{2n-2}+\cdots+\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_{ci}^2-\prod_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^2\right)\geqslant 0.\end{aligned}$$

上式显然是一个 ω 的偶次多项式，要使它对所有实数 $\omega\in R$ 均成立，则必须有首项系数和常数项均非负.

定理 2 的证明.

把(6)式确定的 Q 阵代人方程(4)有

$$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP-(A^TT_2+T_2S)T_1^{-1}=0,$$

上式两边同时右乘 T_1 可得

$$P(A-BR^{-1}B^TP)T_1-T_2S+A^T(PT_1-T_2)=0. \tag{A4}$$

(7)式两边同时左乘 $T_2T_1^{-1}$，经整理得

$$T_2T_1^{-1}(AT_1-BR^{-1}B^TT_2)-T_2S=0,$$

即

$$(T_2T_1^{-1})(A-BR^{-1}B^TT_2T_1^{-1})T_1-T_2S=0. \tag{A5}$$

由(A4)式和(A5)式可知 $P=T_2T_1^{-1}$ 将是方程(A4)的解. 因此，$F=R^{-1}B^TT_2T_1^{-1}$ 是一个最优反馈增益，根据(7)式有

$$A_c=A-BF=T_1ST_1^{-1}, \tag{A6}$$

即闭环系统矩阵和 S 有相同的特征值集合.

定理 3 的证明.

对于任何一个单输入可控系统，总存在一个线性变换 C，使之成为可控标准形

$$A=\begin{bmatrix}0 & I_{n-1}\\ -a_0 & -a_1\cdots-a_{n-1}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}. \tag{A7}$$

若取 $T_1=I_n$，$R=1$，则(7)式简化为

$$A-S=BB^TT_2. \tag{A8}$$

显然可取

$$S=\begin{bmatrix}0 & I_{n-1}\\ -b_0 & -b_1\cdots-b_{n-1}\end{bmatrix},$$

S 将具有期望的特征值 λ_{ci}，且有

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_0-a_0 & b_1-a_1 & \cdots & b_{n-1}-a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdots 0\\ \vdots\cdots\cdots\vdots\\ 0\cdots 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ t_{n,1} & t_{n,2} & \cdots & t_{n,n}\end{bmatrix}. \tag{A9}$$

由上式有

$$t_{n,i}=b_{i-1}-a_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n). \tag{A10}$$

由定理 2 可知，$P=T_2T_1^{-1}$，要使 $P=P^T$，则必须有 $T_2=T_2^T$. 并且不难计算出

$$(T_2S)_{ij}=(a_{i-1}-b_{i-1})b_{j-1}+t_{i,j-1},$$

$$(T_2A)_{ij}=(a_{i-1}-b_{i-1})a_{j-1}+t_{i,j-1}.$$

因此,由定理 2 有

$$\bar{Q}_{ij} = b_{i-1}b_{j-1} - a_{i-1}a_{j-1} - t_{i,j-1} - t_{j,i-1}, \tag{A11}$$

式中$(\cdot)_{ij}$表示矩阵的第 i 行第 j 列元素.

定理 4 的证明.

为了简便起见,考虑一个 SISO 可控标准形系统,由文献[1]有

$$P_c(S)P_c(-S) = P_0(S)P_0(-S) + [\mathrm{adj}(-SI - A)b]^T Q[\mathrm{adj}(SI - A)b], \tag{A12}$$

$$\mathrm{adj}(S\ I - A)b = [1 S \cdots S^{n-1}]^T, \tag{A13}$$

$$\mathrm{adj}(-SI - A)b = [1 \quad -S \cdots (-1)^{n-1}S^{n-1}]^T. \tag{A14}$$

把(A13)式和(A14)式代入(A12)式右边, 不难看到: 由 Q 阵和 $\hat{Q}$ 阵将对应有相同的特征多项式 $P_c(S)$, 即有相同的反馈增益 F. 式中对角阵满足:

$$\hat{Q} = \mathrm{diag}\left(Q_{i,i} + 2\sum_{m=1}^{i}(-1)^m Q_{i-m,i+m}\right), \tag{A15}$$

式中 $Q_{i,j}$ 表示Q阵的第 i 行第 j 列元素. 由定理 3 和(A15)式有

$$\hat{Q}_{i,i} = b_{i-1}^2 - a_{i-1}^2 + 2\sum_{m=1}^{i}(-1)^m(b_{i-m-1}b_{i+m-1} - a_{i-m-1}a_{i+m-1}).$$

定理 5 的证明.

由(10)式有

$$A_c = A - BF = A - B(R + B^TPB)^{-1}B^TPA, \tag{A16}$$

经适当的代数变换后,(39)式可改写成

$$A_c = (I_n + BR^{-1}B^TP)^{-1}A. \tag{A17}$$

因此,

$$\det A_c \cdot \det(I_n + BR^{-1}B^TP) = \det A.$$

又

$$\det(I_n + BR^{-1}B^TP) = \det(R + B^TPB)/\det R \geqslant 1,$$

故

$$\det A/\det A_c \geqslant 1,$$

即有

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_{oi}\Big/\prod_{i=1}^{n}\lambda_{ci} \geqslant 1. \tag{A18}$$

若把(A16)式代入(11)式,有

$$Q = P - A^TPA_c \geqslant 0,$$

因而

$$\det P \geqslant \det A \cdot \det P \cdot \det A_c,$$

即有 $\det A \cdot \det A_c \leqslant 1$, 根据(A18)式得

$$0 < \prod_{i=1}^{n}\lambda_{oi} \cdot \prod_{i=1}^{n}\lambda_{ci} \leqslant 1.$$

证毕

定理 6 的证明.

由最优控制理论有

$$\frac{a_0}{b_0}P_c(z)P_c(z^{-1}) - P_0(z)P_0(z^{-1})$$
$$= P_0(z)D(zI - A)^{-1}\bar{B}\bar{B}^T(z^{-1}I - A^T)^{-1}D^TP_0(z^{-1}), \tag{A19}$$

式中 $\bar{B} = BR^{-1/2}$, D 满足 $Q = D^TD$. 经计算后有

$$P_0(z)D(zI - A)^{-1}\bar{B} = \sum_{i=0}^{n}M_iZ^i, \tag{A20}$$

式中 $M_i=\sum_{j=1}^{n-i}a_{i+j}DA^{j-1}\bar{B}$，因此

$$\frac{a_0}{b_0}P_c(z)P_c(z^{-1})-P_0(z)P_0(z^{-1})=\sum_{i=0}^{n}M_iZ^i\cdot\sum_{j=0}^{n}M_j^Tz^{-j}. \tag{A21}$$

展开(A21)式左右的乘积，根据系数相等的原则，有

$$\sum_{i=k}^{n}\left(\frac{a_0}{b_0}b_ib_{i-k}-a_ia_{i-k}\right)=\sum_{i=k}^{n-1}M_iM_{i-k}^T\ (K=0,1,\cdots,n-1),$$

当 $K=0$ 时，有

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{a_0}{b_0}b_i^2-a_i^2\right)=\sum_{k=0}^{n-1}M_iM_i^T\geqslant 0.$$

证毕

由于定理 7，8，9 的证明方法和定理 2，3，4 的证明方法很相似，故略。

参 考 文 献

[1] Kalman, R. E., When is a Linear Control System Optimal, *Trans ASME(D)*, **86**(1964), 51—60.

[2] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Linear Optimal Control, Prentice-hall, (1971), 100—300.

[3] Lee, T. T. and Liaw, G. T., The Inverse Problem of Linear Optimal Control for Constant Disturbance, *Int. J. Control,* **43**(1986), 233—246.

A STUDY ON THE LQ INVERSE PROBLEMS

Li Renhou

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Xie Songhe   Zhu Ronghua

(Zhengzhou Institute of Light Industry, Zhengzhou 450002)

Abstract

In this paper, the existence of the solutions of LQ inverse problems is studied for linear time-invariant systems. The parametric formula of the solutions of inverse problems are given. The analysis relations among the wegthing matrix Q and coefficients of the open-loop and closed-loop characteristic polynomials are obtained. Upon the given stable closed-loop poles, the matrix Q can correspondingly be determined.

Key words: LQ inverse problem; weighting matrix; characteristic polynomial.