第23卷 第6期
1997年11月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 23, No. 6
Nov., 1997

短 文

2-D 奇异系统无穷远极点与状态响应公式[1)]

杜春玲　杨成梧

（南京理工大学动力工程学院　南京　210094）

摘　要　针对二维奇异系统的一般模型(2-D SGM)，提出无穷远极点的概念，进而探讨了无穷远极点与状态响应公式的关系，给出状态响应公式成立的充要条件.

关键词　2-D 奇异系统，无穷远极点，状态响应公式.

1　引言

自 Roesser 等人提出 2-D Roesser 模型(2-D RM) 以来，Attasi，Fornasini 和 Marchesini 先后在不同背景下提出更为一般的模型，而 Kurek 则集前人之大成，从理论上抽象概括出最为一般的 2-D 状态空间模型(2-D GM). 自这几种较为流行的二维系统模型被推广为奇异模型以来，使奇异系统的发展已颇具规模，其应用前景也十分广阔，诸如应用于图象处理等领域. 然而，到目前为止尚未有人提出 2-D 奇异系统无穷远极点这一重要问题. 对其状态响应的研究，以 Kaczorek 为代表，在文献[1—3]中作了大量工作，但并没有考虑到无穷远极点问题. 而无穷远极点的性质决定了其所推导的状态响应公式的成立与否.

2　2-D SGM 无穷远极点定义

考虑 2-D SGM

$$\begin{aligned} E\boldsymbol{x}(i+1,j+1) = {} & A_0\boldsymbol{x}(i,j) + A_1\boldsymbol{x}(i+1,j) + A_2\boldsymbol{x}(i,j+1) \\ & + B_0\boldsymbol{u}(i,j) + B_1\boldsymbol{u}(i+1,j) + B_2\boldsymbol{u}(i,j+1), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(i,j) = C\boldsymbol{x}(i,j) + D\boldsymbol{u}(i,j). \tag{2}$$

边界条件为 $\boldsymbol{x}(i,0)$，$\boldsymbol{x}(0,j)$，$(i,j)\geqslant(0,0)$为二元整值坐标；$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{y}$，分别为状态、输入和输出向量，$\boldsymbol{x}\in R^n$；E，A_i，B_i，C，D 分别为各具适当维数的常值实矩阵，且 $\det E=0$，E，A_i满足正则束条件

---

1)国家自然科学基金资助项目.

收稿日期　1995-09-18

$$\det(z_1z_2E - A_0 - z_1A_1 - z_2A_2) \neq 0. \tag{3}$$

定义 1. 称(0,0)为系统(1)的无穷远及左侧无穷远和右侧无穷远极点系指,当$(z_1, z_2)=(0,0)$及$(\lambda,0)$和$(0,\mu)$时有

$$\det(E - z_2A_1 - z_1A_2 - z_1z_2A_0) = 0. \tag{4}$$

3 2-D 多项式的零点性质

定义 2. 称 2-D 多项式 $f(z_1,z_2)\in R[z_1,z_2]$关于 $z_1=0$(或 $z_2=0$)是本原的,系指

$$f(0,z_2) \neq 0 \qquad (\text{或} f(z_1,0) \neq 0). \tag{5}$$

而称 $f(z_1,z_2)$关于原点(0,0)是本原的,系指它关于 $z_1=0, z_2=0$ 均为本原的.这里$R[z_1,z_2]$为 z_1,z_2 的实系数多项式环.

引理 1. 设 2-D 多项式 $f(z_1,z_2)\in R[z_1,z_2]$关于 $z_2=0$ 是本原的,如果 $f(0,0)=0$,则对于 $\varepsilon>0$ 充分小,就 $\exists\ \delta>0$,使得对 $\forall\ |z_2|<\delta$,在$|z_1|<\varepsilon$ 内均至少存在一点$z_1=\varphi(z_2)$,有

$$f(\varphi(z_2),z_2) = 0. \tag{6}$$

证明.将 $f(z_1,z_2)$视为 1-D 多项式环 $R[z_2][z_1]$中的元,则由 $f(z_1,0)\neq 0$ 及 $f(0,0)=0$ 知:(i)$f(z_1,0)$至少存在一个零点 $z_1=0$;(ii)零点 $z_1=0$ 是孤立的,从而只要 $\varepsilon>0$ 充分小,由 2-D 多项式的连续性和$|z_1|=\varepsilon, |z_2|\leqslant r(r>0)$的紧性知,只要取 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 充分小,就有

$$|f(z_1,z_2)| \geqslant C > 0, |z_1| = \varepsilon, |z_2| < \delta. \tag{7}$$

由此及解析函数零点个数定理[4]知,对$|z_2|<\delta, f(z_1,z_2)\in R[z_2][z_1]$在$|z_1|<\varepsilon$ 内的零点个数为

$$n(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z_1|=\varepsilon}\frac{f'_{z_1}(z_1,z_2)}{f(z_1,z_2)}\mathrm{d}z_1. \tag{8}$$

此式表明 $n(z_2)$在$|z_2|\leqslant\delta$ 内是 z_2 的连续函数[5],但 $n(z_2)$取整值且 $n(0)$至少为 1.证毕.

推论 1. 若 2-D 多项式 $f(z_1,z_2)\in R[z_1,z_2]$关于(0,0)是本原的,且 $f(0,0)=0$,则对$\forall\ r>0$ 必有 $\lambda_0,\mu_0, 0<|\lambda_0|\leqslant r, 0<|\mu_0|\leqslant r$,使得

$$f(\lambda_0,\mu_0) = 0. \tag{9}$$

推论 2. 设 2-D 多项式 $f(z_1,z_2)\in R[z_1,z_2]$关于(0,0)是本原的,则对$\forall\ r>0$,

$$f(z_1,z_2) \neq 0 \qquad (0 < |z_1| \leqslant r, 0 < |z_2| \leqslant r) \tag{10}$$

与

$$f(z_1,z_2) \neq 0 \qquad (|z_1| \leqslant r, |z_2| \leqslant r) \tag{11}$$

等价.证明由推论 1 直接可得.

推论 3. 设 $f(z_1,z_2)\in R[z_1,z_2]$,则必有 $\bar{f}(z_1,z_2)\in R[z_1,z_2]$,使得

$$f(z_1,z_2) = z_1^{n_1}z_2^{n_2}\bar{f}(z_1,z_2). \tag{12}$$

其中 $\bar{f}(z_1,z_2)$关于(0,0)本原,且

$$f(z_1,z_2) \neq 0, 0 < |z_1| \leqslant r, 0 < |z_2| \leqslant r. \tag{13}$$

当且仅当

$$\bar{f}\ (z_1,z_2)\neq 0,|z_1|\leqslant r,|z_2|\leqslant r. \tag{14}$$

证明由 2-D 多项式本原分解定理[6]及推论 2 即得.

4　无穷远极点与状态的响应公式

由(12)式知,(4)式左端必能表示成 $z_1^{n_1}z_2^{n_2}\bar{f}(z_1,z_2)$的形式,此时称 $f(z_1,z_2)$具有容度 $z_1^{n_1}z_2^{n_2}$[7],$(n_1,n_2)\leqslant(n,n)$.

定义 3.　设 $f(z_1,z_2)$具有容度 $z_1^{n_1}z_2^{n_2}$,称系统(1)的无穷远极点是正则(或非奇异)的,系指$\bar{f}(0,0)\neq 0$,此时正则无穷远极点的阶数定义为(n_1,n_2).

引理 2.　2-D SGM 的特征矩阵

$$G(z_1,z_2)=(z_1z_2E-z_1A_1-z_2A_2-A_0) \tag{15}$$

的逆可展为

$$G^{-1}(z_1,z_2)=\sum_{p=-n_1+1}^{\infty}\sum_{q=-n_2+1}^{\infty}T_{p,q}z_1^{-p}z_2^{-q}\qquad(0\leqslant n_1,n_2\leqslant n), \tag{16}$$

当且仅当系统(1)具有(n_1,n_2)阶正则无穷远极点.

证明.

充分性. 设(1)式具有(n_1,n_2)阶正则无穷远极点,则由 $\bar{f}(z_1,z_2)$的连续性知,存在充分小的 $r>0$,使得

$$\bar{f}\ (z_1,z_2)\neq 0,|z_1|\leqslant r,|z_2|\leqslant r. \tag{17}$$

从而

$$\begin{aligned}z_1^{-n_1+1}z_2^{-n_2+1}G^{-1}(z_1,z_2)&=z_1^{-n_1}z_2^{n_2}(E-z_2^{-1}A_1-z_1^{-1}A_2-z_1^{-1}z_2^{-1}A_0)\\&=\frac{\mathrm{adj}(E-z_2^{-1}A_1-z_1^{-1}A_2-z_1^{-1}z_2^{-1}A_0)}{\bar{f}(z_1^{-1},z_2^{-1})}\end{aligned} \tag{18}$$

在$|z_1^{-1}|\leqslant r,|z_2^{-1}|\leqslant r$ 内解析,则(18)式左端可展为

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}T_{p,q}z_1^{-p}z_2^{-q}. \tag{19}$$

于是 $G^{-1}(z_1,z_2)$可表示为(16)式的形式.

必要性. 设 G^{-1}可展为(16)式,则易知,如有 $\lambda_0^{-1},\mu_0^{-1}$ 使得(16)式收敛,则幂级数

$$\lambda_0^{\bar{n}_1}\mu_0^{\bar{n}_2}\sum_{p=-\bar{n}_1}^{\infty}\sum_{q=-\bar{n}_2}^{\infty}T_{p,q}\lambda_0^{p}\mu_0^{q}. \tag{20}$$

亦收敛,从而 $z_1^{-n_1}z_2^{-\bar{n}_2}G^{-1}(z_1,z_2)$在$|z_1|\leqslant|\lambda_0|,|z_2|\leqslant|\mu_0|$内解析,这里 $\bar{n}_k=n_k-1$. 另一方面,若设系统(1)具有容度 $z_1^{n_1},z_2^{n_2}$,则若系统(1)存在奇异无穷远极点,则由(18)式及推论 1 知,这与 $z_1^{-\bar{n}_1}z_2^{-\bar{n}_2}G^{-1}(z_1,z_2)$在(0,0)域内的解析性矛盾,因此系统(1)必不存在奇异无穷远极点.

由此,可得如下重要结论.

定理.　Kaczorek[3]给出的 2-D SGM 的状态响应公式成立,当且仅当该 2-D SGM 不存在奇异无穷远极点.

至此,不难导出存在奇异无穷远极点下的 2-D SGM 的状态响应公式,限于篇幅从略.

参 考 文 献

[1] Kaczorek T. The singular general model of 2-D systems and its solution. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1988, **33** (8): 1060—1061.

[2] Kaczorek T. Existence and uniqueness of solution and Caley-Hamilton theorem for general singular model of 2-D systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sci.*, *Tech.*, 1989, **36**(2): 275—278.

[3] Kaczorek T. General formula and minimum energy control for the general singular model of 2-D systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990, **35**(4): 433—436.

[4] 余家荣. 复变函数, 北京: 人民教育出版社, 1980, 124—126.

[5] Svashnikov A, Tikhonov A. The theory of functions of a complex variable. Moscow: Mir Publishers, 1978, 53—54.

[6] 杨成梧, 邹云. 2-D 线性离散系统. 北京: 国防工业出版社, 1995, 298—302.

INFINITE POLE AND STATE RESPONSE FORMULA FOR 2-D SINGULAR SYSTEMS

DU CHUNLING　　YANG CHENGWU

(School of Power Engineering & Dynamics, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

Abstract This paper presents the concept of the infinite pole for 2-D singular systems. The relationship between the infinite pole and the state response formula is discussed. And a sufficient and necessary condition for the state response formula to be tenable is given.

Key words 2-D singular systems, infinite pole, state response formula.