

2-D 离散系统的观测器¹⁾

杨成梧 陈雪如
(华东工学院, 南京)

摘 要

本文分别讨论了 2-D 离散系统 FM 模型的观测器问题, 给出了系统存在全阶和降维状态观测器的新的充分条件和构造方法。

关键词: 多维系统, 线性离散系统, 观测器。

一、引 言

观测器是 2-D 线性系统理论的组成部分, Kawaji^[1] 曾在 1984 年较为透彻地研究了 RM 模型^[3]的 2-D 观测器, 获得了丰富的成果。Bisiacco^[2] 在 1986 年进一步研究了 FM 模型的观测器问题, 其方法是通过出现在 Bezout 恒等式中的矩阵来构造一个观测器的传递函数, 再经实现的方式达到建立观测器方程的目的。由于实现的问题本身就较为复杂, 所以本文绕过了实现问题, 直接试图从观测器的定义来构造观测器, 最终得到了观测器存在的新的充分条件, 同时也给出了观测器的构造方法, 最后给出了一个说明性算例。

二、FM 的观测器

考虑如下形式的 FM II 模型^[3]

$$\mathbf{x}(i+1, j+1) = A_1 \mathbf{x}(i, j+1) + A_2 \mathbf{x}(i+1, j) + B_1 \mathbf{u}(i, j+1) + B_2 \mathbf{u}(i+1, j), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(i, j) = C \mathbf{x}(i, j), \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.2)$$

式中 i, j 分别为垂直和水平的整值坐标, $\mathbf{x}(i, j) \in R^n$ 为 (i, j) 处的局部状态向量, $\mathbf{u}(i, j) \in R^m$ 为输入向量, $\mathbf{y}(i, j) \in R^l$ 为输出向量, A_1, A_2, B_1, B_2, C 为具有适当维数的常值实矩阵, 式(1)的边界条件由下式给出:

$$\mathbf{x}(i, 0) = \mathbf{x}_{i0}, \quad \mathbf{x}(0, j) = \mathbf{x}_{j0}, \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

考察如下的 2-D 线性系统:

$$\mathbf{z}(i+1, j+1) = F_1 \mathbf{z}(i, j+1) + F_2 \mathbf{z}(i+1, j)$$

本文于 1989 年 1 月 7 日收到。

1) 本文曾在 1989 年全国控制理论与应用学术年会上宣读。

$$+ G_1 \mathbf{u}(i, j+1) + G_2 \mathbf{u}(i+1, j) + H_1 \mathbf{y}(i, j+1) + H_2 \mathbf{y}(i+1, j), \quad (3.1)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(i, j) = L \mathbf{z}(i, j) + K \mathbf{y}(i, j), \quad (3.2)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}(i, j) \in R^n$ 是 \mathbf{x} 的渐近估计, $\mathbf{z}(i, j) \in R^p$, 而 $F_\alpha, G_\alpha, H_\alpha (\alpha = 1, 2)$ 以及 L, K 是具有适当维数的常值矩阵.

定义. 2-D 系统(3)称为 FMM II 的 p 阶状态渐近观测器, 系指:

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{x}}(i, j) - \mathbf{x}(i, j)) = 0, \quad (4)$$

且此收敛与已知(可量测)输入及(已知或未知)边界条件(2)无关.

定义观测器的误差为

$$\mathbf{e}(i, j) = \mathbf{z}(i, j) - T \mathbf{x}(i, j), \quad T \in R^{p \times n}, \quad (5)$$

则有如下定理.

定理 1. 2-D 系统(3)是 FMM II 的渐近观测器的充分条件是:

$$T A_1 = F_1 T + H_1 C, \quad (6.1)$$

$$T A_2 = F_2 T + H_2 C, \quad (6.2)$$

$$G_1 = T B_1, \quad (6.3)$$

$$G_2 = T B_2, \quad (6.4)$$

$$L T + K C = I_n. \quad (6.5)$$

如果边界条件(2)未知, 则充分条件中还必须包括

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F^{i, j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.1)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F^{i, j} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.2)$$

其中 $F^{i, j} = F_1 F^{i-1, j} + F_2 F^{i, j-1}$, $F^{0, 0} = I$.

证. 将式(1.1)、式(3.1)代入式(5), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(i+1, j+1) &= F_1 \mathbf{e}(i, j+1) + F_2 \mathbf{e}(i+1, j) + (F_1 T - T A_1 + H_1 C) \mathbf{x}(i, j+1) \\ &+ (F_2 T - T A_2 + H_2 C) \mathbf{x}(i+1, j) + (G_1 - T B_1) \mathbf{u}(i, j+1) \\ &+ (G_2 - T B_2) \mathbf{u}(i+1, j). \end{aligned} \quad (8)$$

显然若式(6)成立, 则

$$\mathbf{e}(i+1, j+1) = F_1 \mathbf{e}(i, j+1) + F_2 \mathbf{e}(i+1, j), \quad (9)$$

由文[6]知式(9)的解为

$$\mathbf{e}(i, j) = \sum_{k=1}^i F^{i-k, j-1} F_2 \mathbf{e}(k, 0) + \sum_{l=0}^j F^{i-1, j-l} F_1 \mathbf{e}(0, l). \quad (10)$$

又将式(1.1)、式(5)代入式(3.2), 得

$$\hat{\mathbf{x}}(i, j) = L \mathbf{e}(i, j) + (L T + K C) \mathbf{x}(i, j). \quad (11)$$

因此, 如式(6.5)成立, 则

$$\hat{\mathbf{x}}(i, j) = L \mathbf{e}(i, j) + \mathbf{x}(i, j). \quad (12)$$

若边界条件(2)未知且式(7)成立, 则 $\lim_{i, j \rightarrow \infty} \mathbf{e}(i, j) = 0$, 从而由式(12)即得 $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{x}}(i, j) - \mathbf{x}(i, j)) = 0$. 而若边界条件(2)已知, 则由式(5)确定观测器的边界条件 $\mathbf{z}(k, 0), \mathbf{z}(0, l)$,

$k, l = 0, 1, 2, \dots$, 即可使得 $e(k, 0) = 0, e(0, l) = 0, k, l = 0, 1, 2, \dots$, 从而 $e(i, j) = 0, i, j = 1, 2, \dots$, 故亦有 $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (\hat{x}(i, j) - x(i, j)) = 0$. 由此定理得证.

引理. 定理 1 中条件(7)成立的充分条件是下述条件之一成立:

1) F_1, F_2 分别具有形式 $F_1 = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$, 且 F_{11}, F_{22} 的特征值位于单位圆内;

2) F_1, F_2 分别具有形式 $F_1 = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$, 且 F_{11}, F_{22} 的特征值位于单位圆内.

证. 只须证1)即可. 记 $\tilde{F} \triangleq F_1 + F_2 = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$, 则 $\tilde{F}^{1,0} = F_1, \tilde{F}^{0,1} = F_2$, 从而

$$\tilde{F}^{i,j} = \tilde{F}^{1,0} \tilde{F}^{i-1,j} + \tilde{F}^{0,1} \tilde{F}^{i,j-1} = F_1 \tilde{F}^{i-1,j} + F_2 \tilde{F}^{i,j-1} = F^{i,j}.$$

于是由文献[1]中的引理 1 即知式(7)成立, 证毕.

在式(6.4)、式(6.5)中令 $L = I_n, K = 0$, 则可解得

$$\begin{aligned} G_1 &= B_1, \\ G_2 &= B_2, \\ F_1 &= A_1 - H_1 C, \\ F_2 &= A_2 - H_2 C, \\ T &= I_n. \end{aligned}$$

于是可有如下定理.

定理 2. 任取 $n_1 < n$, 将 A_i 分块成 $A_i = \begin{pmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} \\ A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)} \end{pmatrix}$ 其中 $A_{11}^{(i)} \in R^{n_1 \times n_1}$, 并设 $H_i =$

$\begin{pmatrix} H_{i_1} \\ H_{i_2} \end{pmatrix}, C = [C_1, C_2]$, 其中 $H_{i_1} \in R^{n_1 \times l}, i = 1, 2, C_1 \in R^{l \times n_1}$, 则 FMMII 存在全阶观测

器的充分条件是下列条件之一成立:

I) ① $((I_l - C_2 C_2^-) C_1, (A_{11}^{(1)} - A_{12}^{(1)} C_2^- C_1))$ 可检测.

② $(C_2, A_{22}^{(2)})$ 可检测.

③ $\text{rank } C_1 = \text{rank} \begin{pmatrix} C_1 \\ A_{11}^{(2)} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} C_1 \\ A_{21}^{(1)} \end{pmatrix}$.

④ $\text{rank } C_2 = \text{rank} \begin{pmatrix} C_2 \\ A_{12}^{(2)} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} C_2 \\ A_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} C_2 \\ A_{12}^{(1)} \end{pmatrix}$.

II) ① $(C_1, A_{11}^{(1)})$ 可检测.

② $((I_l - C_1 C_1^-) C_2, (A_{22}^{(2)} - A_{21}^{(2)} C_1^- C_2))$ 可检测.

③ $\text{rank } C_1 = \text{rank} \begin{pmatrix} C_1 \\ A_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} C_1 \\ A_{11}^{(2)} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} C_1 \\ A_{21}^{(2)} \end{pmatrix}$.

④ $\text{rank } C_2 = \text{rank} \begin{pmatrix} C_2 \\ A_{12}^{(1)} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} C_2 \\ A_{12}^{(2)} \end{pmatrix}$.

其中 $(\cdot)^-$ 表示矩阵 (\cdot) 的 Penrose 逆矩阵.

证. 只须证 I), 在定理假定的分块情况下令

$$F_1 = A_1 - H_1 C = \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} - H_{11} C_1 & A_{12}^{(1)} - H_{11} C_2 \\ A_{21}^{(1)} - H_{12} C_1 & A_{22}^{(1)} - H_{12} C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$F_2 = A_2 - H_2 C = \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} - H_{21} C_1 & A_{12}^{(2)} - H_{21} C_2 \\ A_{21}^{(2)} - H_{22} C_1 & A_{22}^{(2)} - H_{22} C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

则显然由引理和定理 2 即可知 FMM II 存在全阶观测器, 由式(13)、式(14)得

$$H_{11} C_2 = A_{12}^{(1)}, \quad (15.1)$$

$$H_{12} C_1 = A_{21}^{(1)}, \quad (15.2)$$

$$H_{12} C_2 = A_{22}^{(1)}, \quad (15.3)$$

$$H_{21} C_1 = A_{11}^{(2)}, \quad (15.4)$$

$$H_{21} C_2 = A_{12}^{(2)}. \quad (15.5)$$

由 Kronecker-Capelli 定理即知, 式(15)成立的充要条件是 I) 中③和④成立. 因此有

$$H_{11} = A_{12}^{(1)} C_2^- + C_0 (I_l - C_2 C_2^-), \quad C_0 \text{ 任意}. \quad (16)$$

从而 $F_{11} = A_{11}^{(1)} - H_{11} C_1 = A_{11}^{(1)} - A_{12}^{(1)} C_2^- C_1 - C_0 (I_l - C_2 C_2^-) C_1$ 的特征值位于单位圆内, 当且仅当 I) 中①成立. 而由式(14)知: $F_{22} = A_{22}^{(2)} - H_{22} C_2$ 的特征值位于单位圆内, 当且仅当 $(C_2 \ A_{22}^{(2)})$ 可检测, 证毕.

三、算 例

例. 设给定 FMM II 的系数阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0].$$

求它的一个全阶观测器. 容易验证定理 2 中条件 2) 满足, 令

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{bmatrix},$$

则

$$F_1 = A_1 - H_1 C = \begin{bmatrix} 4 - h_{11} & 0 & 2 \\ 1 - h_{12} & 0 & 0 \\ -2 - h_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} -h_{21} & 0 & 0 \\ -h_{22} & 0 & 0 \\ -h_{23} & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $h_{11} = \frac{7}{2}$, $h_{12} = 1$, $h_{13} = -2$, $H_2 = 0$, 则得

$$F_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

故所求的全阶观测器的方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(i+1, j+1) = & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(i, j+1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(i+1, j) \\ & + \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u}(i, j+1) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \mathbf{u}(i+1, j) + \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(i, j+1). \end{aligned}$$

四、结 束 语

本文分别讨论了 FM 的渐近状态观测器问题, 得出了一些新的有关充分条件和算法, 这些结果具有直观易实现的特点, 但未涉及有关参数扰动的灵敏度与鲁棒性问题, 而这些问题的讨论, 无疑也是十分有意义的。

参 考 文 献

- [1] Kawaji, Minimal Order State Observer for Two-dimensional Systems, Copyright © IFAC 9th Triennial World Congress, Budapest, Hungary, (1984).
- [2] Bisiacco, M., On the Structure of 2-D observers, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, **31**(1986), 7.
- [3] 杨成梧, 二维线性多变量系统, 华东工学院, (1987).
- [4] Kaczorek, T., Eigenvalue Assignment problem for 2-D Systems with Separable Characteristic Polynomials, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser Techn.*, **32**(1984), 2.
- [5] 黄琳, 系统与控制理论中的线性代数, 科学出版社, (1984).
- [6] Fornasini, E. & Marchesini, C., Doubly Indexed Dynamical System, State Space Models and Structural properties, *Mathematical Systems Theory*, **12**(1978), 1.
- [7] 王 翼, 离散控制系统, 科学出版社, (1984).

THE OBSERVER OF TWO-DIMENSIONAL DISCRETE SYSTEMS

YANG CHENGWU CHEN XUERU
(East China Institute of Technology)

ABSTRACT

In this paper, we discuss the observer design problems of the 2-D discrete linear systems. Some new sufficient conditions and algorithms for the existence of the observer are proposed.

Key words: Multidimensional systems; linear discrete systems; observer.