短文

# 2-D Roesser 模型的静态干扰解耦[1)]

杨成梧
（南京理工大学动力工程学院 210014）

方勇
（四川内江师范专科学校 641002）

**摘要**

本文讨论了 2-D Roesser 模型[1]（RM）的静态干扰解耦问题[2]（简称为 2-D DDP），即寻求 2-D 状态反馈使相应的闭环系统具有抗干扰的能力，得到了问题有解的充分条件和计算相应反馈阵的算法.

**关键词**：2-D 系统、状态反馈、干扰解耦.

## 1 引言

2-D 系统与 1-D 系统有着十分密切的联系，许多 1-D 情形的结果在 2-D 系统中亦有相应的表述，文[3]在这方面作了十分有益的尝试. 在 1-D 系统中，一个重要的问题是：当系统受到某一未知外加干扰作用时，是否存在状态反馈使闭环系统的输出不受外干扰的影响？文[2]称为干扰解耦问题（DDP），许多文献（如文[4]等）对此有较深入的讨论. 显然在 2-D 系统中，同样存在这类问题，本文将其简称为 2-D DDP，并给出了 Roesser 模型（RM）的 2-D DDP 有解的充分条件和相应反馈阵的算法.

## 2 问题的描述

考虑如下受干扰作用的 RM：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + D\boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{1a}$$

其中

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^h(i+1,j) \\ \hdashline \boldsymbol{x}^v(i,j+1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^h(i,j) \\ \hdashline \boldsymbol{x}^v(i,j) \end{bmatrix},$$

1）本文由国家自然科学基金资助.
本文于 1991 年 11 月 22 日收到.

$$A=\left[\begin{array}{c|c}A_{11}&A_{12}\\\hline A_{21}&A_{22}\end{array}\right],\ B=\left[\begin{array}{c}B_1\\\hline B_2\end{array}\right],\ C=(C_1\mid C_2),\ D=\left[\begin{array}{c}D_1\\\hline D_2\end{array}\right],$$

$\boldsymbol{x}^h(i,j)\in R^{n_1}$ 为水平状态向量，$\boldsymbol{x}^v(i,j)\in R^{n_2}$ 为垂直状态向量，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(i,j)\in R^m$ 为输入向量，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(i,j)\in R^q$ 为干扰向量，$\boldsymbol{y}=y(i,j)\in R^p$ 为输出向量，$A_{ij}$，$B_i$，$C_i$，$D_i(i=1,2)$为适当维数的实矩阵，边界条件为 $\boldsymbol{x}^h(0,j),\boldsymbol{x}^v(i,0),(i,j=0,1,2,\cdots)$.

设 $p\leqslant m$，对系统(1)作状态反馈

$$\boldsymbol{u}=-L\boldsymbol{x},\tag{2}$$

得闭环系统为

$$\boldsymbol{x}'=(A-BL)\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u}+D\boldsymbol{f},\tag{3a}$$

$$\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}.\tag{3b}$$

对系统(3)作二维Z变换易得

$$Y(z_1,z_2)=C(Z-A+BL)^{-1}BU(z_1,z_2)$$
$$+C(Z-A+BL)^{-1}DF(z_1,z_2)+(Z-A+BL)^{-1}\left[\begin{array}{c}z_1\boldsymbol{x}^h(0,z_2)\\\hline z_2\boldsymbol{x}^v(z_1,0)\end{array}\right],\tag{4}$$

式中 $Z=\mathrm{diag}\{z_1I_{n_1},z_2I_{n_2}\}$，这里 $I_k$ 表示 $k$ 阶单位阵. 由(4)式知，要使闭环系统(3)的输出不受外干扰的影响，当且仅当

$$C(Z-A+BL)^{-1}D=0.\tag{5}$$

因此，问题可描述为给定 $A,B,C,D$，求 $L$ 使方程(5)成立.

## 3 问题有解的条件

令　$$G_L(z_1,z_2)=C(Z-A+BL)^{-1}D,$$

根据文[5]，有

$$G_L(z_1,z_2)=\frac{1}{\bar d(z_1,z_2)}\Bigg(\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}\sum_{i=0}^{n_1-k}\sum_{j=0}^{n_2-l}\bar d_{i+k,j+l}z_1^iz_2^jC$$
$$\cdot\left[\begin{array}{c|c}(A-BL)_{11}^{k-1,l}&(A-BL)_{12}^{k,l-1}\\\hline(A-BL)_{21}^{k-1,l}&(A-BL)_{22}^{k,l-1}\end{array}\right]D\Bigg)$$
$$=\frac{1}{\bar d(z_1,z_2)}\Bigg(\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}\sum_{i=0}^{n_1-k}\sum_{j=0}^{n_2-l}\bar d_{i+k,j+l}z_1^iz_2^jC[(A-BL)^{k-1,l}D_{1,0}$$
$$+(A-BL)^{k,l-1}D_{0,1}]\Bigg),$$

其中 $(\cdot)^{k,l}$ 为状态转移阵(详见文[5])，而

$$\bar d(z_1,z_2)\triangleq\det(Z-A+BL)=\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\bar d_{ij}z_1^iz_2^j,\ D_{1,0}\triangleq\left(\begin{array}{c}D_1\\\hline 0\end{array}\right),\ D_{0,1}\triangleq\left(\begin{array}{c}0\\\hline D_2\end{array}\right),$$

$$\left[\begin{array}{c|c}(A-BL)_{11}^{k,l}&(A-BL)_{12}^{k,l}\\\hline(A-BL)_{21}^{k,l}&(A-BL)_{22}^{k,l}\end{array}\right]\triangleq(A-BL)^{k,l},$$

可得如下结论:

**定理 1.** 对系统(1), 2-D DDP 有解的充要条件为存在 $L$, 对于 $\forall(k,l)\in[(0,0),(n_1,n_2)]$ 有

$$C\left[\begin{array}{c:c}(A-BL)_{11}^{k-1,l} & (A-BL)_{12}^{k,l-1}\\ \hdashline (A-BL)_{21}^{k-1,l} & (A-BL)_{22}^{k,l-1}\end{array}\right]D=C[(A-BL)^{k-1,l}D_{1,0}+(A-BL)^{k,l-1}D_{0,1}]$$
$$=0, \tag{6}$$

若记 $\bar{A}\triangleq A-BL$,则

$$\left[\begin{array}{c}\bar{x}^h(i+1,j)\\ \hdashline \bar{x}^v(i,j+1)\end{array}\right]\triangleq\bar{A}\left[\begin{array}{c}\bar{x}^h(i,j)\\ \hdashline \bar{x}^v(i,j)\end{array}\right]+D\bar{u}(i,j), \tag{7}$$

根据文[1]有

**推论 1.** 对系统(1),2-D DDP 有解的必要条件是系统(7)在 $[(0,0),(n_1,n_2)]$ 上不局部能控.

要求得满足(5)式的 $L$ 是相当困难的, 下面先对 $B_2=0$ 的情形进行讨论, 此时设 $L=(0\mid L_2)$, 易知[5]

$$(-BL)^{1,0}=\left[\begin{array}{c:c}0 & -B_1L_2\\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right],\ (-BL)^{0,1}=\left[\begin{array}{c:c}0 & 0\\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right],$$

$$(-BL)^{i,j}=\left[\begin{array}{c:c}0 & 0\\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right],\ (1,0)\leqslant(i,j)\leqslant(n_1,n_2). \tag{8}$$

**引理 1**[1]. 对任何方阵 $P$、$Q$, 下面的关系式成立:

$$(P+Q)^{i,j}=P^{i,j}+P^{i-1,j}Q^{1,0}+P^{i,j-1}Q^{0,1}+\cdots+P^{0,1}Q^{i,j-1}+P^{1,0}Q^{i-1,j}+Q^{i,j},$$
$$i,j\geqslant 0. \tag{9}$$

**引理 2**[6]. $AXB=C$ 有解 $\Longleftrightarrow$ $AA^-CBB^-=C$, 且一般解为 $X=A^-CB^-+(\hat{X}+A^-A\hat{X}BB^-)$, 这里 $\hat{X}$ 为适当维数的任意矩阵, $A^-$ 为 $A$ 的一个广义逆, 满足 $AA^-A=A$.

由(8),(9)式,有

$$\begin{aligned}&C[(A-BL)^{k-1,l}D_{1,0}+(A-BL)^{k,l-1}D_{0,1}]\\&=C\{[A^{k-1,l}+A^{k-2,l}(-BL)^{1,0}+A^{k-1,l-1}(-BL)^{0,1}\\&\quad+\cdots+A^{0,1}(-BL)^{k-1,l-1}+A^{1,0}(-BL)^{k-2,l}+(-BL)^{k-1,l}]D_{1,0}\\&\quad+[A^{k,l-1}+A^{k-1,l-1}(-BL)^{1,0}+A^{k,l-2}(-BL)^{0,1}+\cdots\\&\quad+A^{0,1}(-BL)^{k,l-2}+A^{1,0}(-BL)^{k-1,l-1}+(-BL)^{k,l-1}]D_{0,1}\}\\&=CA^{k-1,l}D_{1,0}+CA^{k,l-1}D_{0,1}-CA^{k-1,l-1}B_{1,0}L_2D_2.\end{aligned}$$

记 $W(k,l)=CA^{k-1,l}D_{1,0}+CA^{k,l-1}D_{0,1}$,

$$M(k,l)=CA^{k-1,l-1}B_{1,0},$$

则由(6)式,存在 $L=(0\mid L_2)$ 使 2-D DDP 有解的充要条件是存在 $L_2$ 使

$$M(k,l)L_2D_2=W(k,l),\ \forall(k,l)\in[(0,0),(n_1,n_2)].$$

记

$$\overline{M}=\begin{bmatrix}M(0,0)\\M(0,1)\\M(1,0)\\M(1,1)\\\vdots\\M(k,l)\end{bmatrix}\in R^{(k+1)(l+1)p\times m},\quad \overline{W}=\begin{bmatrix}W(0,0)\\W(0,1)\\W(1,0)\\W(1,1)\\\vdots\\W(k,l)\end{bmatrix}\in R^{(k+1)(l+1)p\times q},$$

有下面结论:

**定理 2.** 对系统(1),若 $B_2=0$, 则存在 $L=(0|L_2)$ 使 2-D DDP 有解的充要条件是 $\overline{M}L_2D_2=\overline{W}$ 有解.

由引理 2, 可得如下推论:

**推论 2.** 对系统(1),若 $B_2=0$, 则存在 $L=(0|L_2)$ 使 2-D DDP 有解的充要条件是 $\overline{M}\overline{M}^-\overline{W}D_2^-D_2=\overline{W}$, 且 $L_2=\overline{M}^-\overline{W}D_2^-+(\hat{X}+\overline{M}^-\overline{M}\hat{X}D_2D_2^-)$, ($\hat{X}$ 为适当维数的任意矩阵).

对系统(1),当 $B_2=0$ 时, 2-D DDP 有如下算法:

步骤 1. 计算 $A^{k,l}$, $(0,0)\leqslant(k,l)<(n_1,n_2)$,

步骤 2. 计算 $\overline{M}$、$\overline{W}$,

步骤 3. 验证 $\overline{M}\overline{M}^-\overline{W}D_2^-D_2=\overline{W}$ 是否成立.

步骤 4. 计算 $L_2=\overline{M}^-\overline{W}D_2^-+(\hat{X}+\overline{M}^-\overline{M}\hat{X}D_2D_2^-)$,即得反馈阵 $L=(0|L_2)$.

下面重新考察方程(5),记

$$G_1(z_1,z_2)\triangleq C(Z-A)^{-1}B,\ G_2(z_1,z_2)\triangleq C(Z-A)^{-1}D,$$

与文[4]类似可得

**引理 3.** (5) 式有解的充要条件是存在 $L$ 满足

$$G_2(z_1,z_2)=G_1(z_1,z_2)[I+L(Z-A)^{-1}B]^{-1}L(Z-A)^{-1}D. \tag{10}$$

先设 $p=m$, 且 $G_1(z_1,z_2)$ 满秩,由(10)式得

$$L(Z-A)^{-1}[D-BG_1^{-1}(z_1,z_2)G_2(z_1,z_2)]=G_1^{-1}(z_1,z_2)G_2(z_1,z_2).$$

记 $(Z-A)^{-1}=\dfrac{N(z_1,z_2)}{d(z_1,z_2)}$, $G^{-1}(z_1,z_2)G_2(z_1,z_2)=\dfrac{N_m(z_1,z_2)}{d_m(z_1,z_2)}$,则上式改写为

$$L[d_m(z_1,z_2)N(z_1,z_2)D-N(z_1,z_2)BN_m(z_1,z_2)]=N_m(z_1,z_2)d(z_1,z_2). \tag{11}$$

又记 $\overline{N}(z_1,z_2)=d_m(z_1,z_2)N(z_1,z_2)D-N(z_1,z_2)BN_m(z_1,z_2)\in R^{n\times q}[z_1,z_2]$, (12)

$$\overline{N}_m(z_1,z_2)=d(z_1,z_2)N_m(z_1,z_2)\in R^{m\times q}[z_1,z_2], \tag{13}$$

则

$$L\overline{N}(z_1,z_2)=\overline{N}_m(z_1,z_2). \tag{14}$$

**定理 3.** (5)式有解的必要条件是 $G_1^{-1}(z_1,z_2)G_2(z_1,z_2)$ 为真有理的.

证明. 若 $G_1^{-1}(z_1,z_2)G_2(z_1,z_2)$ 不是真有理的,则 $N_m(z_1,z_2)$ 的元关于 $z_1(z_2)$ 的最高次数大于 $d_m(z_1,z_2)$ 关于 $z_1(z_2)$ 的最高次数,而 $\dfrac{N(z_1,z_2)}{d(z_1,z_2)}$ 为严格真有理的, 故 $\overline{N}_m(z_1,z_2)$的元关于 $z_1(z_2)$ 的最高次数必大于 $\overline{N}(z_1,z_2)$ 的元关于 $z_1(z_2)$ 的最高次数,因而(14)式无解,定理结论成立.

改写(14)式，有

$$\bar{N}^2(z_1,z_2)\bar{L} = \bar{N}_m(z_1,z_2),\ \bar{L} = L^2. \tag{15}$$

由矩阵的 Kronecker 乘积可把(15)式改写为

$$Q(z_1,z_2)\hat{L} = P(z_1,z_2), \tag{16}$$

其中 $Q(z_1,\ z_2) = \bar{N}^v(z_1,z_2)\otimes I_m = \sum_{i=0}^{\bar{n}_1}\sum_{j=0}^{\bar{n}_2} Q_{ij}z_1^i z_2^j$，$Q_{ij}\in R^{qm\times nm}$，$\bar{n}_i = n_i^3, i = 1,2$. $\hat{L}\triangleq(\bar{L}_1,\bar{L}_2,\cdots,\bar{L}_n)^v\in R^{nm}$，$P(z_1,\ z_2)\triangleq(P_1(z_1,\ z_2),\ P_2(z_1,\ z_2),\cdots,\ P_q(z_1,\ z_2))^v = \sum_{i=0}^{\bar{n}_1}\sum_{j=0}^{\bar{n}_2} P_{ij}z_1^i z_2^j$，式中 $P_{ij}\in R^{qm}$，$\bar{L}_i$，$P_i(z_1,z_2)$ 分别为 $\bar{L}$、$P(z_1,z_2)$ 的第 $i$ 行，代入(16)式得

$$\sum_{i=0}^{\bar{n}_1}\sum_{j=0}^{\bar{n}_2} Q_{ij}\hat{L}z_1^i z_2^j = \sum_{i=0}^{\bar{n}_1}\sum_{j=0}^{\bar{n}_2} P_{ij}z_1^i z_2^j. \tag{17}$$

比较(17)式两边系数得

$$Q_{ij}\hat{L} = P_{ij}, i = 0,\ 1,\cdots,\bar{n}_1;\ j = 0,1,\cdots,\bar{n}_2.$$

记

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{00} \\ Q_{10} \\ Q_{01} \\ Q_{11} \\ \vdots \\ Q_{\bar{n}_1\bar{n}_2} \end{bmatrix}\in R^{qm\bar{n}\times nm},\ \bar{n} = (\bar{n}_1+1)(\bar{n}_2+1),\ P = \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ P_{01} \\ P_{11} \\ \vdots \\ P_{\bar{n}_1\bar{n}_2} \end{bmatrix}\in R^{qm\bar{n}},$$

则(17)式改写为

$$Q\hat{L} = P, \tag{18}$$

方程(18)是含有 $qm\bar{n}$ 个方程和 $nm$ 个未知数的线性方程组，令 $\mathrm{rank}Q = r$，$T$ 为 $qm\bar{n}$ 阶可逆阵，使

$$TQ = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

其中 $Q_1$ 是 $r\times nm$ 行满秩阵，用 $T$ 左乘方程(18)并利用(19)式得

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}\hat{L} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \hdashline P_2 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

即 $Q_1\hat{L} = P_1, P_2 = 0$，其中，$\begin{bmatrix} P_1 \\ \hdashline P_2 \end{bmatrix} = TP$，$P_1\in R^r, P_2\in R^{qm\bar{n}-r}$.

**定理 4.** 对系统(1)，当 $p = m$，$G_1(z_1,\ z_2)$ 非奇异时，2-D DDP 有解的充分条件是 $P_2 = 0$，且 $\hat{L} = Q_1^v(Q_1Q_1^v)^{-1}P_1$，进而可求得 $L$.

下面讨论一般情形 $p\leqslant m$，若存在 $\tilde{C} = (\tilde{C}_1|\tilde{C}_2)\in R^{(m-p)\times n}$，$\tilde{C}_1\in R^{(m-p)\times n_1}$，$\tilde{C}_2\in R^{(m-p)\times n_2}$ 使 $G_1^*(z_1,\ z_2) = \begin{bmatrix} C \\ \hdashline \tilde{C} \end{bmatrix}(Z-A)^{-1}B$ 可逆，则记 $G_2^*(z_1,z_2) = \begin{bmatrix} C \\ \hdashline \tilde{C} \end{bmatrix}(Z-$

$A)^{-1}D$，将 $\begin{bmatrix} C \\ \hdashline \widetilde{C} \end{bmatrix}$ 代替前面的 $C$，由定理 4 知，系统

$$x' = Ax + Bu + Df,\quad y = \begin{bmatrix} C \\ \hdashline \widetilde{C} \end{bmatrix} x \triangleq C^* x.$$

2-D DDP 有解的充分条件是 $P_2^* = 0$，此时方程

$$C^*(Z - A)^{-1}B[I + L(Z - A)^{-1}B]^{-1}L(Z - A)^{-1}D - C^*(Z - A)^{-1}D = 0$$

有解 $L$，显然这个 $L$ 也满足

$$C(Z - A)^{-1}B[I + L(Z - A)^{-1}B]^{-1}L(Z - A)^{-1}D - C(Z - A)^{-1}D = 0.$$

**定理 5.** 对系统(1)，若存在 $\widetilde{C} \in R^{(m-p)\times n}$ 使 $G_1^*(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} C \\ \hdashline \widetilde{C} \end{bmatrix}(Z - A)^{-1}B$ 可逆，$P_2^* = 0$，则系统能由状态反馈实现干扰解耦.

算法如下:

步骤 1. 确定 $\widetilde{C}$ 使 $G_1^*(z_1, z_2)$ 可逆，并计算 $G_1^*(z_1, z_2)$、$G_2^*(z_1, z_2)$.

步骤 2. 由(12)，(13)式计算 $\bar{N}^*(z_1, z_2)$、$\bar{N}_m^*(z_1, z_2)$.

步骤 3. 计算 $Q^*$、$P^*$，并进行初等变换

$$T^*Q^* = \begin{bmatrix} Q_1^* \\ \hdashline 0 \end{bmatrix},\quad T^*P^* = \begin{bmatrix} P_1^* \\ \hdashline P_2^* \end{bmatrix}.$$

若 $P_2^* = 0$，则进行下一步.

步骤 4. 计算 $\hat{L} = Q_1^{*\nu}(Q_1^* Q_1^{*\nu})^{-1} P_1^*$，可求得反馈阵 $L$.

# 4 结 束 语

本文提出了 2-D Roesser 模型通过静态反馈的干扰解耦问题，并给出了相应的充要条件(5)，但是要求得满足(5)的 $L$ 极为困难，文中先就 $B_2 = 0$ 时进行讨论，得出了存在形如 $(0 \mid L_2)$ 的反馈阵使 2-D DDP 有解的充要条件及算法，然后通过解方程(10)给出了问题有解的充分条件及相应算法，显然本文所得结果均可推广到 $N$ 维系统中.

致谢. 作者在本文的写作过程中，得到了邹云同志的大力支持，在此表示感谢.

## 参 考 文 献

[1] Kaczorek T. Two-Dimensional Linear Systems. Springer-Verlag, 1985, Chapt 1.

[2] Wonham W. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Springer Veralag, 1974.

[3] Conte G and Perdon A. A Geometric approach to the theory of 2-D system. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 10: 946—950.

[4] 张 谕，韩京清，线性控制系统由状态反馈实现抗干扰的条件，控制理论与应用，1989，6(2): 36—43.

[5] Metrzios B G. Paraskevopoulos P N. Transfer Function Matrix of 2-D Systems. *IEEE Tans. Autom. Coatr.*, 1981, 26(3): 722—724.

[6] 须田信英等著，曹长修译. 自动控制中的矩阵理论. 科学出版社，1979.

# CONDITIONS FOR PROBLEM OF DISTURBANCE DECOUPLING OF A 2-D LINEAR DISCRETE SYSTEM (2-D DDP) BY THE STATE FEEDBACK

YANG CHENGWU

(*Power Engineering College, Nanjing Univ. of Science and Technology* 210014)

FANG YONG

(*Neijiang Normal College Neijiang Sichuan* 641002)

ABSTRACT

In this paper, 2-D DDP is discussed. Necessary and sufficient conditions for the solvability of 2-D DDP are established. Also the algorithms for finding a state feedback matrix are presented.

**Key words:** 2-D systems; state feedback; disturbance decoupling.