



用 Petri 网结构化的方法求解 实时并行运算调度问题¹⁾

陈 陈

(清华大学智能技术与系统实验室, 北京 100084)

摘 要

本文讨论多资源有顺序关系的运算调度问题。算法中每步所需时间已知, 用 Petri 网建模可使问题高度结构化, 搜索空间只限于符合顺序的可行解部分^[1], 求得有资源约束及无资源约束两种条件下并行处理的最小时间跨度和相应的调度方案, 所得结果为精确解。

关键词: Petri 网, 调度, 并行运算。

一、问题及其 Petri 网描述

在实时控制系统中, 一种算法所需的运算时间常常是它能否被采用的关键。运算的先后顺序由算法限定, 每步运算所需时间已知, 最优调度把计算效率提高到极限, 按顺序的操作或施工过程也可利用本调度方法的思想^[2]。

优化目标: 并行处理周期的时间跨度

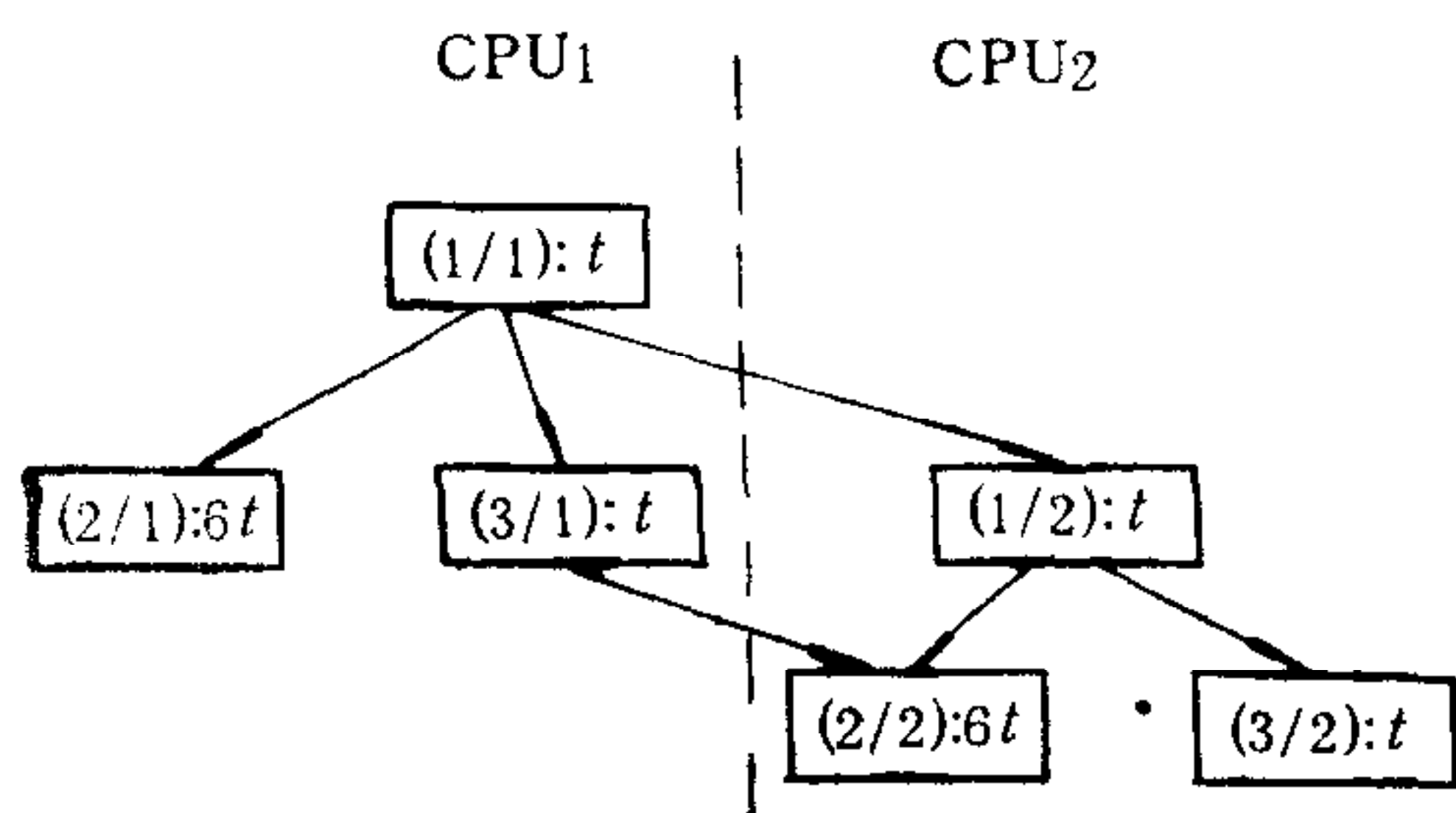


图1 算法顺序举例^[3]

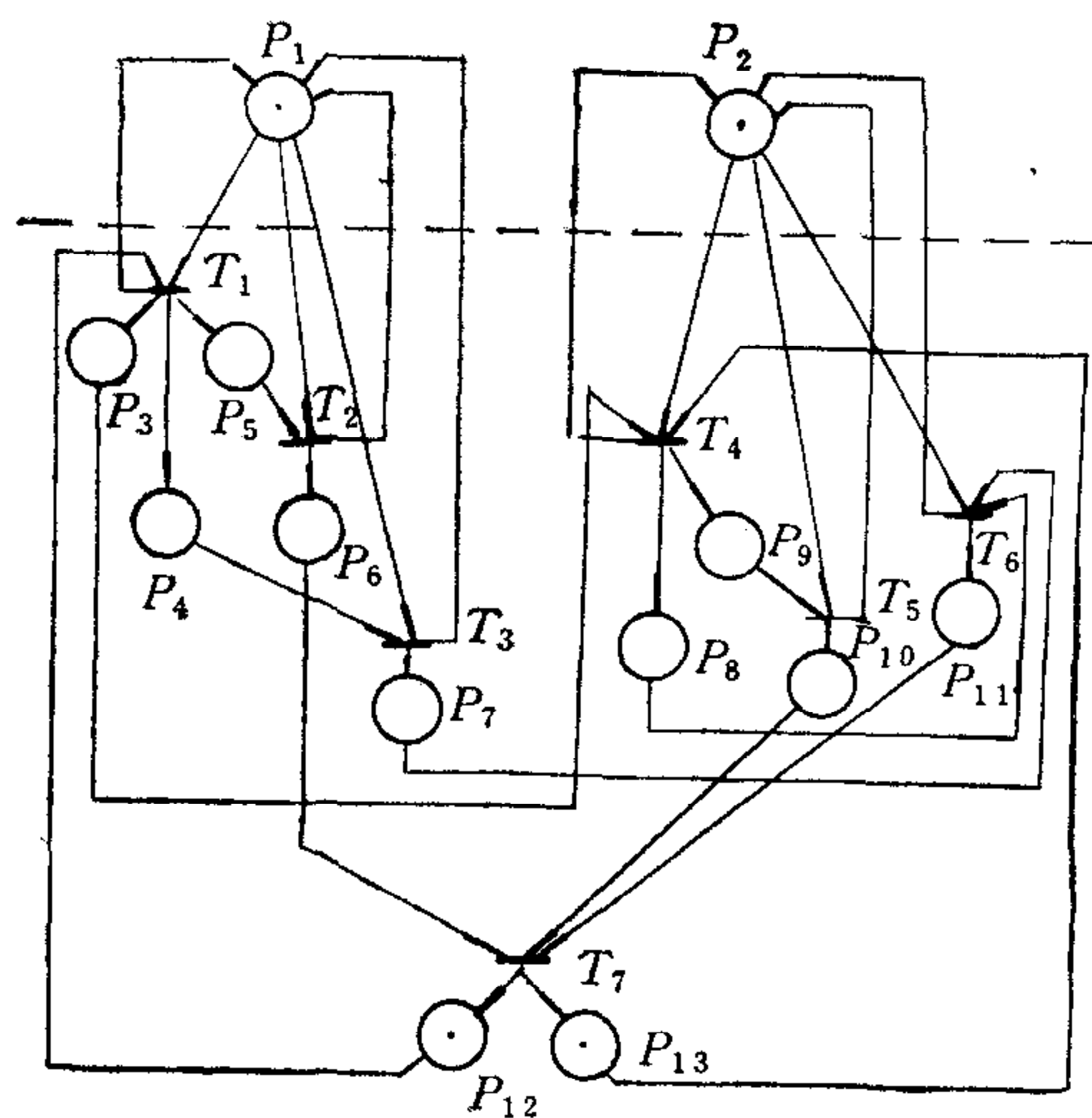


图2 Petri 网模型

最小。

约束条件: 1)各步运算之间有顺序关系;2)周期中每步运算按顺序进行一次;3)(供

本文于1990年9月21日收到。

1) 本课题为作者1990年在美国 Clemson 大学进行的自然科学基金国际合作项目“智能控制系统模式研究”。

选择的)资源数及分配关系已定。

例中(2/1)表示 CPU1 进行运算 2,6*t* 为所需计算时间,是确定值。

以 Petri 网描述调度问题的方式并非唯一的,本文选用最便于分析的形式,如图 2 所示^[4]。图中 $P_i, i = 1, 2$ 表示 CPU; $T_j, j = 1, \cdots, 6$ 为运算;库所 $P_3、P_4、P_5、P_7、P_8$ 和 P_9 表示后续运算应具备的条件;变迁 $T_4、T_3、T_2、T_6、T_1$ 及 T_5 表示后续运算发生。库所 $P_6、P_{10}$ 及 P_{11} 将无后续的运算都连接到 T_7, T_7 起开关作用,保证各个运算按顺序进行一遍后下一周期才能开始。 $P_{12}、P_{13}$ 分别连接无前导的运算,初始化时其中若有标识则允许 $T_1、T_4$ 发生。按此方式建立的 Petri 网特点如下: 1)弧的权系数均为 1,是普通 Petri 网; 2)虚线以下部分的库所均为单输入单输出,是标识有向图; 3)每个库所中所含标识不多于一个,为有界、安全、协调的一般 Petri 网; 4)每个资源连接多个变迁以描述冲突; 5)每个变迁均有权发生,系统是活的; 6)变迁发生时从每个输入库所中取一个标识,经过运算时间 d_T 以后给每个输出库所一个标识,为 T -Petri 网。

二、资源无约束时的解法

图 2 中虚线以下部分可简化为标识有向图,如图 3 所示。

图中每个回路对应于一个满足顺序关系的序列,各序列可并发。变换持续时间 d_T 总和最长的回路即为关键路径^[2], 时间总和称为最小周期时间 τ_{min} 。所有回路列举如下表:

回路 k	127	457	1457	1367	467	1467
d_k	$7t$	$2t$	$3t$	$8t$	$7t$	$8t$

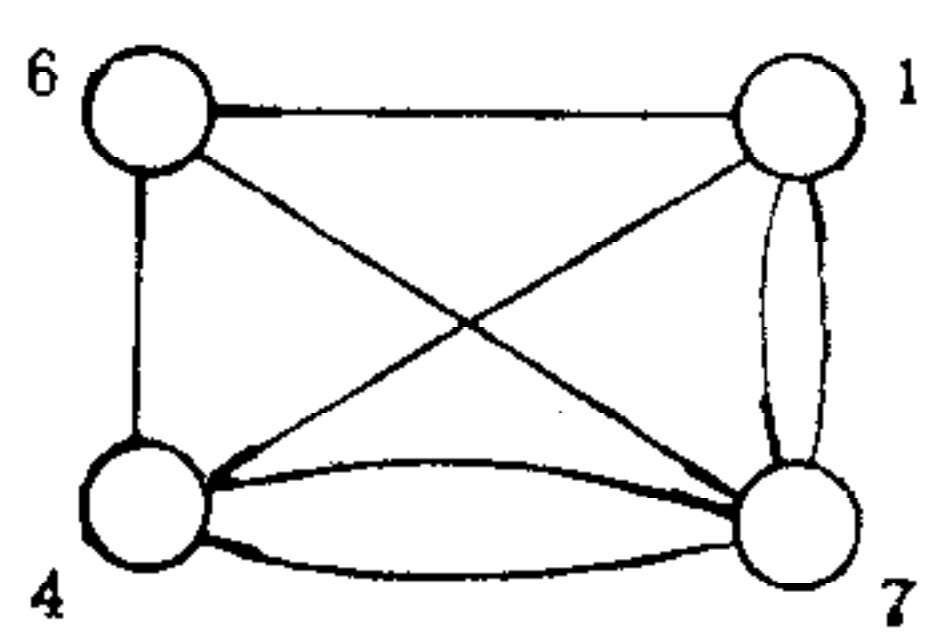


图 3 标识有向图

关键路径为 1367 或 1467, $\tau_{min} = 8t$, 用根特 (Gantt) 图可排出多种最优调度方案,需要三个 CPU。

从数学的角度研究,其基础 Petri 网(无时间因子)可用关联矩阵 A 表示如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

S 不变矩阵表示如下:

$$S \text{ 不变的转置} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

迭代算法是周期性的,变换发生起始并终结于同一初始标识,即

$$\mathbf{M}_0 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T.$$

变换发生的记数矢量 $\mathbf{x} = [k\ k\ k\ k\ k\ k\ k]^T$, 即 T 不变 $= [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$.

S 不变矩阵中每列向量对应于图 3 的一个回路, 由列向量中非零项所对应的库所组成, 并转换成标识有向图的顶点. 最小周期时间

$$\tau_{\min} = \max\{\mathbf{y}_k^T (\mathbf{A}^-)^T \mathbf{D} \mathbf{x} / \mathbf{y}_k^T \mathbf{M}_0\},$$

其中 $\mathbf{y}_k$ 对应于 S 不变矩阵中第 k 列矢量, 矩阵 $\mathbf{D} = \text{diag}[d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5\ d_6\ d_7]$, d_T 为对应变迁发生的持续时间, 矩阵 $\mathbf{A}^-$ 是关联矩阵 $\mathbf{A}$ 中元素 -1 改为 1 而其余元素为零所构成的矩阵. 由上式可得 $\tau_{\min} = 8t$.

三、有资源分配约束时的解法

在资源数和运算分配均已规定的情况下, Petri 网属一般型, 如图 2 所示. 此时最优调度方案的寻求为 $N-P$ 完全问题^[5], 计算复杂度随问题规模增长很快.

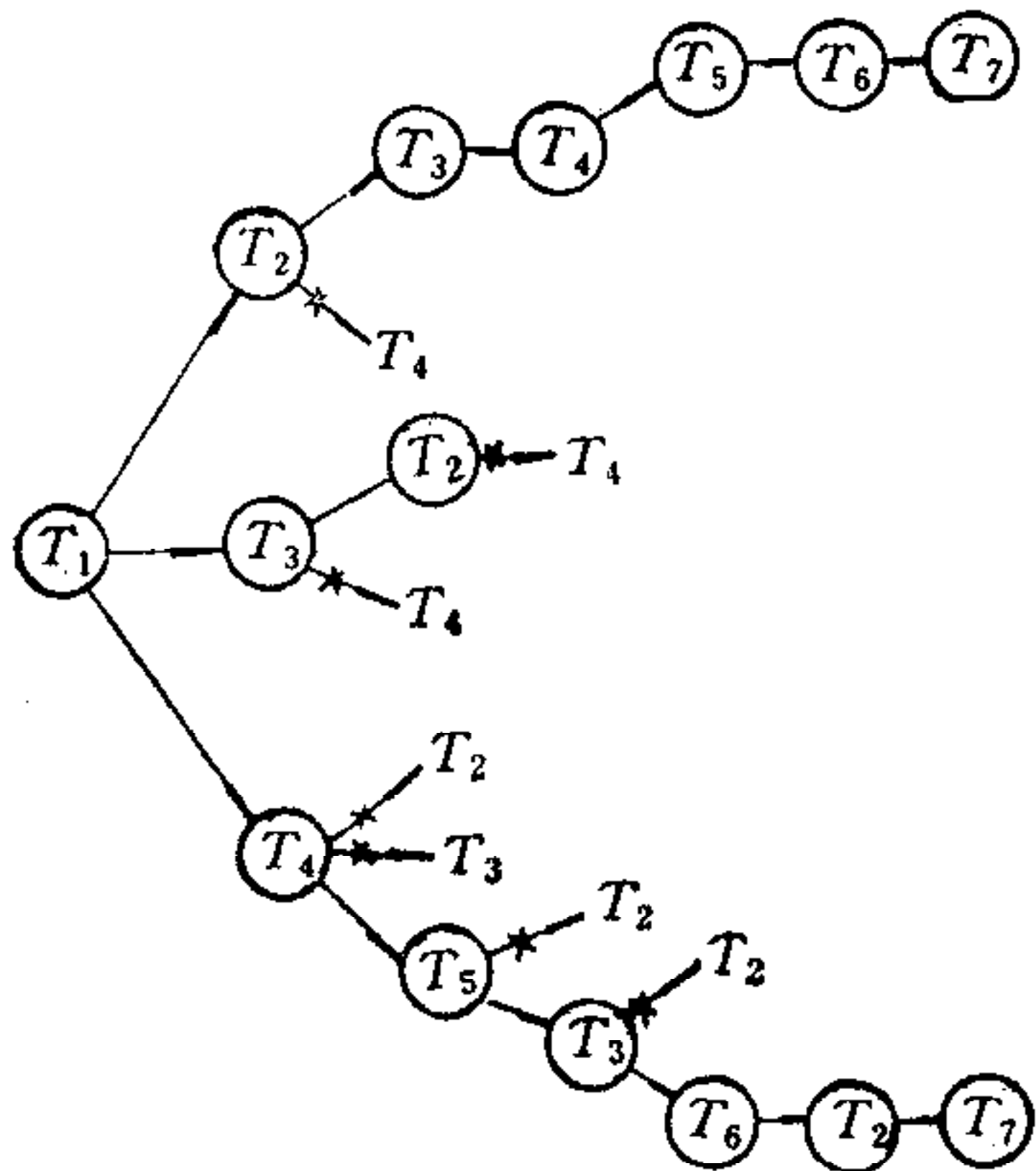


图 4 可行解搜索

最小周期时间有下界 $\tau_{\min}$, 计算同前. 求解有资源约束下的调度问题通过对所有可能激发的变换序列进行穷举搜索而进行^[6], 由 Petri 网的可达性可得全部变换序列, 再借助于状态图化成表示整个搜索空间的可行解树, 其序列顺序均符合运算要求. 搜索最优调度方案时本文采用混合分枝定界法.

取任一序列 $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ 及 T_7 , 它对应的时间跨度(根特图)为 $14t$, 以此为上界开始搜索, 步骤如下:

1. 激发有权发生的 T_1 , 则 T_4, T_3 和 T_2 随之有权发生.

2. 激发 T_4 , 则 T_5, T_3 和 T_2 均有权发生. 任一变迁的时间跨度估值为两部分之和: 1) 通向此变迁的路径所对应的时间跨度(根特图); 2) 在此变迁后每个 CPU 所属变迁的时间长度之和, 不计等待时间, 这个估值的对应部分称为局部根特图. 结点 T_4 的局部根特图长 $9t$, 优于现有上界 $14t$, 取 $9t$ 为 T_4 的下限并激发其后续结点 T_5 , 激发 T_5 则 T_3 和 T_2 有权发生. T_5 的估值为 $9t$, 也优于 $14t$, 则激发其后续者. 激发 T_3 则 T_6 和 T_2 有权发生, 时间跨度估值为 $9t$, 仍优于 $14t$, 激发 T_6 则 T_2 有权发生, 时间跨度估值为 $9t$, 小于 $14t$, 继续激发 T_2 则 T_7 有权发生, 此序列结束. 画出激发序列 $T_1, T_4, T_5, T_3, T_6, T_2$ 及 T_7 的根特图, 时间跨度为 $9t$, 优于现存上界 $14t$, 据此方案可将上界改为 $9t$.

搜索过程参考分枝定界法, 任一变迁的估计时间跨度如果优于现存上界, 则移向其子结点并作局部根特图; 若时间跨度估值不优于现有上界, 则删去此结点后的所有序列, 见图 4.

用此法求六关节机器人 Luh-Walker 算法的调度方案 (6CPU), 在 SUN-3 工作站

上需 3 分钟。

参 考 文 献

- [1] Murata, T., Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, *Proc. of the IEEE*, 77(1989), 4, 541—580.
- [2] Conway, R. W. et al. *Theory of Scheduling*, Addison-Wesley, 1967.
- [3] Luh, J. Y. S. and Lin, C. S. Scheduling of Parallel Computation for a Computer-Controlled Mechanical Manipulator, *IEEE Trans. on SMC*, SMC-12(1982), (2), 214—234.
- [4] Molloy, M. K., A CAD Tool for Stochastic Petri Nets, *Proc. of the Fall Joint Computer Conference (IEEE and ACM)*, Dallas, 1986, 11.
- [5] Ramamoorthy, C. V. and Ho, G. S., Performance Evaluation of Asynchronous Concurrent Systems Using Petri Nets, *IEEE Trans. on Software Engineering* (1980), 440—449.
- [6] Carlier, J. and Chretienne, P., Timed Petri Net Schedules, *LNCS Advances in Petri Nets 1988*, Springer Verlag, 1988, 62—84.
- [7] Lawler, E. L. and Wood, D. E., Branch and Bound Methods: A Survey, *Operations Research*, 14(1966), (4), 699—719.

REAL-TIME PARALLEL OPERATION SCHEDULING STRUCTURIZED BY PETRI NETS

CHEN CHEN

(Laboratory of Intelligent Technology and Systems, Tsinghua University, Beijing 100084)

ABSTRACT

A method for scheduling operations with given precedence relation under multiple resources is proposed. The time duration of each operation is deterministic. Minimum time span of parallel processing without and with resource restrictions are solved. Modelling by Petri Nets makes the problem highly structurized, thus limiting the search space merely to feasible solutions subject to precedence relation. These engineering approaches are solved for analytical solutions.

Key words: Petri Nets; scheduling; parallel operations.