

# 一种新的时变大系统递阶控制求解方法

黄苏南 邵惠鹤

(上海交通大学自控系 200030)

## 摘 要

研究了一种新的大系统求解方法,利用 Taylor 级数的性质,将大系统时变递阶控制问题转化为代数方程的求解问题。该方法简单,易于编成计算机程序。算例表明了它的有效性。

**关键词:** 大系统, Taylor 级数, 递阶控制。

## 1 引言

大系统理论研究尽管已有二十多年了,但仍有许多问题需要改进和发展。近年来,正交级数已用于多方面控制问题的分析<sup>[1,2]</sup>。对于大系统情况,文献[3]对关联预估法将第一级的两点边值问题

$$\begin{aligned} X_i &= A_i X_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + D_i, X_i(0) = X_{i0}, \\ P_i &= -Q_i X_i - A_i^T P_i + E_i, P_i(t_f) = 0, \end{aligned}$$

用 Walsh 级数转化成初始值问题,进而得到了大系统的解,作者也曾在文献[4,5]用 Legendre 级数以及 Taylor 级数分别进行了类似的研究。本文研究了大系统的目标协调方法,给出了一种新的大系统求解方法。与文献[3—5]研究的方法不同,这里不是对现有大系统方法中需要求解的 Riccati 方程或者两点边值问题进行求解,而是通过 Taylor 级数近似,将大系统低级求解问题转化成了代数方程的求解问题,得到了大系统的直接解,尽管采用了目标协调法结构,却没有在目标函数中增加没有物理意义的二次项,这一点非常重要。文中首先介绍了 Taylor 级数性质,回顾一种递阶控制的二级协调方法,然后给出了级数的二级协调的算法,最后将这种方法用一个例子进行了仿真,结果是满意的。

## 2 递阶控制的描述

大系统问题是使  $J$  最小

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{t_f} (x_i^T(t) Q_i(t) x_i(t) + u_i^T(t) R_i(t) u_i(t)) dt, \quad (1)$$

这里  $Q_i$  是半正定的,  $R_i$  是正定的,  $n$  是关联子系统的数目,  $x_i$  是第  $i$  个子系统的  $n_i$  维状态向量,  $u_i$  是相应  $m_i$  维控制向量

$$\sum_{i=1}^n n_i = N, \quad \sum_{i=1}^n m_i = M.$$

目标函数(1)最小化必需满足约束

$$\dot{x}_i(t) = A_i(t)x_i(t) + B_i(t)u_i(t) + C_i(t)z_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

这里

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^n L_{ij}(t)x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$z_i$  是  $q_i$  维来自于其它子系统的输入。对于这个大系统, 为了使计算变得容易, 定义对偶函数  $\phi(\lambda)$

$$\phi(\lambda) = \text{Min}\{L(x_i, u_i, \lambda, z_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

这里

$$L(x_i, u_i, \lambda, z_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{t_f} \left[ (x_i^T Q_i(t)x_i + u_i^T R_i(t)u_i) + 2\lambda_i^T \left( z_i - \sum_j L_{ij}(t)x_j \right) \right] dt, \quad (5)$$

式中  $\lambda(t)$  是  $\sum_{i=1}^n q_i = q$  维 Lagrange 乘子。按照强耦合定理

$$\text{Max}_{\lambda} \phi(\lambda) = \text{Min}_{u_i} J, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

于是  $J$  最优化可用  $\phi(\lambda)$  的最大化。给定一个  $\lambda(t)$ , Lagrange 函数  $L$  可分成  $n$  个独立的最小化问题, 第  $i$  个是

$$\text{Min} L_i = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[ (x_i^T Q_i x_i + u_i^T R_i u_i) + 2\lambda_i^T \left( z_i - \sum_{j=1}^n L_{ij} x_j \right) \right] dt, \quad (7)$$

约束为(2)式。这样可用两级结构求解大系统问题, 第一级对于给定的  $\lambda$ , 求解(7)式的最小化问题。在第二级,  $\lambda(t)$  用梯度法校正, 即从  $j$  到  $j+1$

$$\lambda(t)^{j+1} = \lambda(t)^j + \alpha^j d^j, \quad (8)$$

$\alpha^j > 0$  是步长,  $d^j$  为搜索方向, 当  $d^j \rightarrow 0$ , Lagrange 乘子是最优的。

需要注意的是, 上面的讨论并没有在目标函数中加进没有物理意义的二次项  $z_i^2$ 。

### 3 Taylor 级数的性质

一个函数  $f(z)$  能在  $z=0$  附近用 Taylor 级数展开

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i T_i(z), \quad (9)$$

这里

$$T_i(z) = z^i, \quad C_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i f(z)}{dz^i} \right|_{z=0}, \quad (10), (11)$$

也可用  $m$  项级数近似

$$f(z) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i T_i(z) = C^T T(z), \quad (12)$$

式中  $C^T = [C_0 C_1 \cdots C_{m-1}]$ ,  $T^T(z) = [T_0(z) T_1(z) \cdots T_{m-1}(z)]$ . 文献 [2] 指出随着用 Taylor 级数展开的项数增多函数与近似值的误差就小于某个定值. 有关 Taylor 级数的性质如下:

**性质 1<sup>[1]</sup>**. Taylor 级数的运算矩阵为

$$\int_0^z T(z) dz = HT(z), \quad (13)$$

这里  $H$  是运算矩阵

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(m-1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**性质 2<sup>[2]</sup>**.  $T_i$  是 Taylor 级数, 那么有一个重要的结果<sup>[2]</sup>

$$W = \int_0^\beta T(z) T^T(z) dz = (w_{ij})_{m \times m}, \quad (14)$$

这里

$$w_{ij} = \frac{\beta^{i+j+1}}{i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, 2, \cdots, m-1. \quad (15)$$

**性质 3<sup>[2]</sup>**. 对一个向量  $C^T = [c_0 c_1 \cdots c_{m-1}]$ , 有下面结果

$$C^T T(t) T^T(t) = T^T(t) \bar{C}^T, \quad (16)$$

这里

$$\bar{C}^T = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1} & c_{m-2} & c_{m-3} & c_{m-4} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

**定义 1**.  $T_i(t) (i = 0, 1, \cdots, m-1)$  是 Taylor 级数, 定义

$$\hat{T}_n(t) = [I_n T_0(t), I_n T_1(t), \cdots, I_n T_{m-1}(t)]^T, \quad (17)$$

这里  $I_n$  是单位阵.

**性质 4**.  $\hat{T}_n(z)$  如定义 1, 则有

$$\bar{W}_n = \int_0^{\beta} \hat{T}_n(z) \hat{T}_n^T(z) dz = W \otimes I_n, \quad (18)$$

式中  $\otimes$  是 Kronecker 积.

**性质 5**.  $\hat{T}_n(z)$  如定义 1, 则有

$$\int_0^z \hat{T}^T(z) dz = \hat{T}^T(z) \bar{H}^T,$$

这里  $\bar{H}^T = H^T \otimes I_n$ .

**性质6.** 如果  $A$  是  $k \times n$  矩阵,  $\hat{T}_n$  如定义 1, 那么

$$A \hat{T}_n^T = \hat{T}_k^T \bar{A},$$

这里

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & A \end{pmatrix} = I_m \otimes A.$$

## 4 递阶大系统控制的 Taylor 级数方法

### 4.1 第一级控制问题

对给定  $\lambda$ , 设法求得  $L_i$  的最小化并满足约束(2)式. 对于(2)式, 用有限项 Taylor 级数近似  $x_i(t), u_i(t), z_i(t)$ , 可得

$$x_i(t) = \hat{T}^T(t) [x_{i0}^T, x_{i1}^T, \dots, x_{i(m-1)}^T]^T,$$

$$u_i(t) = \hat{T}^T(t) [u_{i0}^T, u_{i1}^T, \dots, u_{i(m-1)}^T]^T,$$

$$z_i(t) = \hat{T}^T(t) [z_{i0}^T, z_{i1}^T, \dots, z_{i(m-1)}^T]^T,$$

$$A_i(t) = [A_{i0} A_{i1} \dots A_{i(m-1)}] \hat{T}(t),$$

$$B_i(t) = [B_{i0} B_{i1} \dots B_{i(m-1)}] \hat{T}(t),$$

$$C_i(t) = [C_{i0} C_{i1} \dots C_{i(m-1)}] \hat{T}(t),$$

这里  $A_{ik}, B_{ik}$  和  $C_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, m-1$ ) 是 Taylor 级数系数矩阵, 可应用(11)式求得. 将  $x(0)$  表示为

$$x_i(0) = \hat{T}^T(t) [x_i^T(0) O^T \dots O^T]^T,$$

这里  $O$  定义为  $n_i \times 1$  向量 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 在  $[0, t]$  积分(2)式得到

$$x_i(t) = \int_0^t A_i(t) x_i(t) dt + \int_0^t B_i(t) u_i(t) dt + \int_0^t C_i(t) z_i(t) dt + x_i(0). \quad (19)$$

也有

$$\begin{aligned} A_i(t) x_i(t) &= [A_{i0} A_{i1} \dots A_{i(m-1)}] \hat{T}(t) \hat{T}^T(t) [x_{i0}^T, x_{i1}^T, \dots, x_{i(m-1)}^T]^T \\ &= \hat{T}^T(t) \bar{A}_i^T [x_{i0}^T, x_{i1}^T, \dots, x_{i(m-1)}^T]^T, \end{aligned}$$

这里  $\bar{A}_i^T$  可由(16)式得到

$$\bar{A}_i^T = \begin{pmatrix} A_{i0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{i1} & A_{i0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{i2} & A_{i1} & A_{i0} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i(m-1)} & A_{i(m-2)} & A_{i(m-3)} & A_{i(m-4)} & \dots & A_{i0} \end{pmatrix}.$$

类似有

$$B_i(t) u_i(t) = \hat{T}^T(t) \bar{B}_i^T [u_{i0}^T, u_{i1}^T, \dots, u_{i(m-1)}^T]^T,$$

$$C_i(t)z_i(t) = \hat{T}^T(t)\bar{C}_i^T[z_{i0}^T, z_{i1}^T, \dots, z_{i(m-1)}^T]^T.$$

同样  $\bar{B}_i^T, \bar{C}_i^T$  也同(16)式类似.

将上述各式代入(19)式, 并应用性质 5, 注意到  $T_i(t)$  是相互独立的, 可得

$$\begin{aligned} [x_{i0}^T, x_{i1}^T, \dots, x_{i(m-1)}^T]^T &= \bar{H}^T \bar{A}_i^T [x_{i0}^T, x_{i1}^T, \dots, x_{i(m-1)}^T]^T \\ &\quad + \bar{H}^T \bar{B}_i^T [u_{i0}^T, u_{i1}^T, \dots, u_{i(m-1)}^T]^T \\ &\quad + \bar{H}^T \bar{C}_i^T [z_{i0}^T, z_{i1}^T, \dots, z_{i(m-1)}^T]^T \\ &\quad + [x_i^T(0)0 \dots 0]^T. \end{aligned} \quad (20)$$

上式也能表示为

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= (I_{mn_i} - \bar{H}^T \bar{A}_i^T)^{-1} [(\bar{H}^T \bar{B}_i^T) \bar{U}_i + (\bar{H}^T \bar{C}_i^T) \bar{Z}_i + \bar{X}_i(0)] \\ &= \bar{B}_{i1} \bar{U}_i + \bar{C}_{i1} \bar{Z}_i + \bar{F}_{i1}, \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= [x_{i0}^T, x_{i1}^T, \dots, x_{i(m-1)}^T]^T, & \bar{U}_i &= [u_{i0}^T, u_{i1}^T, \dots, u_{i(m-1)}^T]^T, \\ \bar{Z}_i &= [z_{i0}^T, z_{i1}^T, \dots, z_{i(m-1)}^T]^T, & \bar{X}_i(0) &= [x_i^T(0)0 \dots 0]^T, \\ \bar{B}_{i1} &= (I_{mn_i} - \bar{H}^T \bar{A}_i^T)^{-1} (\bar{H}^T \bar{B}_i^T), & \bar{C}_{i1} &= (I_{mn_i} - \bar{H}^T \bar{A}_i^T)^{-1} (\bar{H}^T \bar{C}_i^T), \\ \bar{F}_{i1} &= (I_{mn_i} - \bar{H}^T \bar{A}_i^T)^{-1} \bar{X}_i(0), \end{aligned}$$

这里  $I_{mn_i}$  是  $mn_i \times mn_i$  单位阵. 利用性质 3,  $x_i^T(t)Q_i(t)x_i(t)$  和  $u_i^T(t)R_i(t)u_i(t)$  用 Taylor 级数近似

$$x_i^T(t)Q_i(t)x_i(t) = \bar{X}_i^T \hat{T}_{n_i}^T(t) \hat{T}_{n_i}^T(t) \bar{Q}_i^T \bar{X}_i, \quad (22)$$

$$u_i^T(t)R_i(t)u_i(t) = \bar{U}_i^T \hat{T}_{m_i}^T(t) \hat{T}_{m_i}^T(t) \bar{R}_i^T \bar{U}_i, \quad (23)$$

这里  $\hat{T}_{n_i}(t)$  和  $\hat{T}_{m_i}(t)$  如定义 1, 以及  $\bar{Q}_i^T$  与  $\bar{A}_i^T$  得到的方法一样, 类似有  $\bar{R}_i^T$ . 再用级数展开  $\lambda_i(t)$

$$\lambda_i(t) = \hat{T}_{q_i}^T(t) [\lambda_{i0}^T, \lambda_{i1}^T, \dots, \lambda_{i(m-1)}^T]^T = \hat{T}_{q_i}^T(t) \bar{\lambda}_i. \quad (24)$$

同样  $\lambda_i^T(t)z_i(t)$  和  $\lambda_j^T(t)L_{ji}(t)x_i(t)$

$$\lambda_i^T(t)z_i(t) = \bar{\lambda}_i^T \hat{T}_{q_i}^T(t) \hat{T}_{q_i}^T(t) \bar{Z}_i, \quad (25)$$

$$\lambda_j^T(t)L_{ji}(t)x_i(t) = \bar{\lambda}_j^T \hat{T}_{q_i}^T(t) \hat{T}_{q_i}^T(t) \bar{L}_{ji}^T \bar{X}_i, \quad (26)$$

这里  $\bar{L}_{ji}^T$  类似于(16)式. 现在将(22)–(26)式代入(5)式可得

$$L_i = \frac{1}{2} \left[ \bar{X}_i^T \hat{Q}_i \bar{X}_i + \bar{U}_i^T \hat{R}_i \bar{U}_i + 2 \left( \bar{\lambda}_i^T \bar{W}_{q_i} \bar{Z}_i - \sum_j \bar{\lambda}_j^T \bar{W}_{q_j} \hat{L}_{ji} \bar{X}_i \right) \right], \quad (27)$$

这里(用性质 4)

$$\hat{Q}_i = \bar{W}_{n_i} \bar{Q}_i^T, \quad \hat{R}_i = \bar{W}_{m_i} \bar{R}_i^T, \quad \hat{L}_{ji} = \bar{L}_{ji}^T, \quad (28)$$

式中  $\bar{W}_{n_i}, \bar{W}_{m_i}, \bar{W}_{q_i}$ , 和  $\bar{W}_{q_j}$  与(18)式类似.

现在将(21)式代入(27)式则有

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{1}{2} \left[ (\bar{B}_{i1} \bar{U}_i + \bar{B}_{i1} \bar{Z}_i + \bar{F}_{i1})^T \hat{Q}_i (\bar{B}_{i1} \bar{U}_i + \bar{B}_{i1} \bar{Z}_i + \bar{F}_{i1}) + \bar{U}_i^T \hat{R}_i \bar{U}_i \right. \\ &\quad \left. + 2 \bar{\lambda}_i^T \bar{W}_{q_i} \bar{Z}_i - 2 \sum_j \bar{\lambda}_j^T \bar{W}_{q_j} \hat{L}_{ji} (\bar{B}_{i1} \bar{U}_i + \bar{B}_{i1} \bar{Z}_i + \bar{F}_{i1}) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

对于第二级给定的  $\lambda_i^*$ , 最优控制问题简化成求解  $\bar{U}_i$  和  $\bar{Z}_i$  使得  $L_i$  最小. 由最优化的必要条件

$$\frac{\partial L_i}{\partial \bar{U}_i} = 0, \quad \frac{\partial L_i}{\partial \bar{Z}_i} = 0, \quad (30)$$

得到

$$(\bar{B}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{B}_{i1} + \hat{R}_i) \bar{U}_i + \bar{B}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{C}_{i1} \bar{Z}_i + \bar{B}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{F}_{i1} - \sum_j \bar{\lambda}_j^{*T} \bar{W}_{qj} \hat{L}_{ji} \bar{B}_{i1} = 0 \quad (31)$$

$$\bar{C}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{B}_{i1} \bar{U}_i + \bar{C}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{C}_{i1} \bar{Z}_i + \bar{C}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{F}_{i1} + \bar{\lambda}_i^{*T} \bar{W}_{qi} - \sum_j \bar{\lambda}_j^{*T} \bar{W}_{qj} \hat{L}_{ji} \bar{C}_{i1} = 0 \quad (32)$$

整理得

$$\bar{U}_i = \bar{C}_{i2} \bar{Z}_i + \bar{F}_{i21}, \quad \bar{Z}_i = \bar{B}_{i2} \bar{U}_i + \bar{F}_{i22}, \quad (33)$$

式中

$$\bar{C}_{i2} = -(\hat{R}_i + \bar{B}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{B}_{i1})^{-1} \bar{B}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{C}_{i1}, \quad (34)$$

$$\bar{F}_{i21} = -(\hat{R}_i + \bar{B}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{B}_{i1})^{-1} \left( \bar{B}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{F}_{i1} - \sum_j \bar{\lambda}_j^{*T} \bar{W}_{qj} \hat{L}_{ji} \bar{B}_{i1} \right), \quad (35)$$

$$\bar{B}_{i2} = -(\bar{C}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{C}_{i1})^{-1} \bar{C}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{B}_{i1}, \quad (36)$$

$$\bar{F}_{i22} = -(\bar{C}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{C}_{i1})^{-1} \left( \bar{C}_{i1}^T \hat{Q}_i \bar{F}_{i1} + \bar{\lambda}_i^{*T} \bar{W}_{qi} - \sum_j \bar{\lambda}_j^{*T} \bar{W}_{qj} \hat{L}_{ji} \bar{C}_{i1} \right). \quad (37)$$

由(33)式,解

$$\bar{U}_i = (I_{m_i} - \bar{C}_{i2} \bar{B}_{i2})^{-1} (\bar{C}_{i2} \bar{F}_{i22} + \bar{F}_{i21}), \quad (38)$$

$$\bar{Z}_i = \bar{B}_{i2} (I_{m_i} - \bar{C}_{i2} \bar{B}_{i2})^{-1} (\bar{C}_{i2} \bar{F}_{i22} + \bar{F}_{i21}) + \bar{F}_{i22}. \quad (39)$$

将(38),(39)式代入(21)式,得

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= \bar{B}_{i1} (I_{m_i} - \bar{C}_{i2} \bar{B}_{i2})^{-1} (\bar{C}_{i2} \bar{F}_{i22} + \bar{F}_{i21}) \\ &+ \bar{C}_{i1} \bar{B}_{i2} (I_{m_i} - \bar{C}_{i2} \bar{B}_{i2})^{-1} (\bar{C}_{i2} \bar{F}_{i22} + \bar{F}_{i21}) + \bar{C}_{i1} \bar{F}_{i22} + \bar{F}_{i1}. \end{aligned} \quad (40)$$

## 4.2 第二级协调

任务是改进  $\lambda_i$  以达到全局最优。由(8),(27)式得

$$\nabla_{\lambda} L(\bar{\lambda})|_{\lambda_i = \lambda_i^*} = \frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}} = \bar{W}_{qi} \left( \bar{Z}_i - \sum_j \hat{L}_{ij} \bar{X}_j \right) = e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

式中  $\bar{Z}_i$  和  $\bar{X}_j$  分别是(39),(40)式的值。按照协调规则有

$$\bar{\lambda}^{j+1} = \bar{\lambda}^j + \alpha^j \nabla_{\lambda} L(\bar{\lambda}). \quad (41)$$

关联误差如下:

$$\begin{aligned} \text{Error} &= \sum_{i=1}^n \int_0^{t_f} \left( z_i - \sum_j L_{ij} x_j \right)^T \left( z_i - \sum_j L_{ij} x_j \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \bar{Z}_i - \sum_j \hat{L}_{ij} \bar{X}_j \right)^T \bar{W}_{qi} \left( \bar{Z}_i - \sum_j \hat{L}_{ij} \bar{X}_j \right). \end{aligned} \quad (42)$$

一旦总的关联误差是充分小的,那么就求得了系统最优值。最优轨迹按下式得到:

$$x_i(t) = \hat{T}_{n_i}^T(t) \bar{X}_i^*, \quad u_i(t) = \hat{T}_{m_i}^T(t) \bar{U}_i^*, \quad z_i(t) = \hat{T}_{q_i}^T(t) \bar{Z}_i^*.$$

式中  $\bar{X}_i^*$ ,  $\bar{U}_i^*$  和  $\bar{Z}_i^*$  由(38)–(40)式确定。

算法步骤: (1) 先预估  $\bar{\lambda}^*$  值送给低级; (2) 计算(38)–(40)式,得出  $\bar{X}_i$ ,  $\bar{U}_i$ ,  $\bar{Z}_i$ , 但这并不是最优的,将其送到第二级协调; (3) 由(41)式算出修正的  $\bar{\lambda}_i$  再送入到第一级; (4) 由(42)式计算关联总误差,如满足要求,则停止;如不满足误差要求,返回到(2)。

## 5 仿真例子

例. [3]

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

约束为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10t & 1 \\ 1 & -5t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

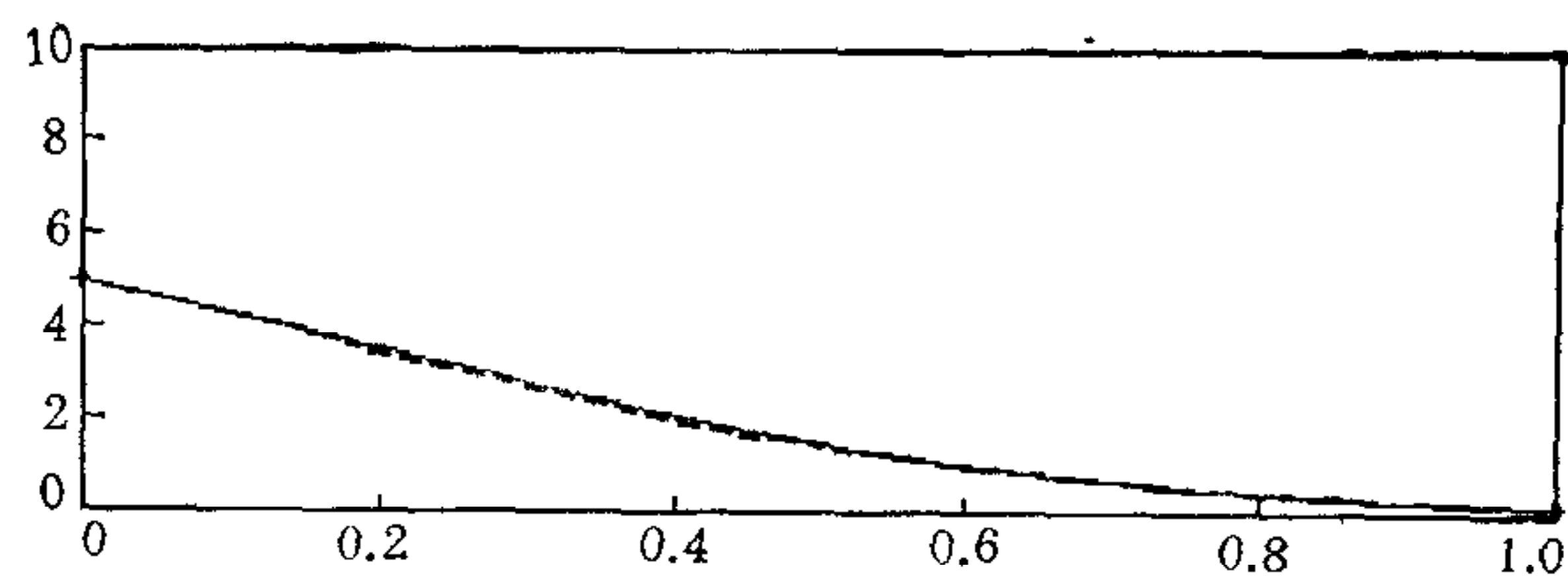
初始值

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix},$$

这里

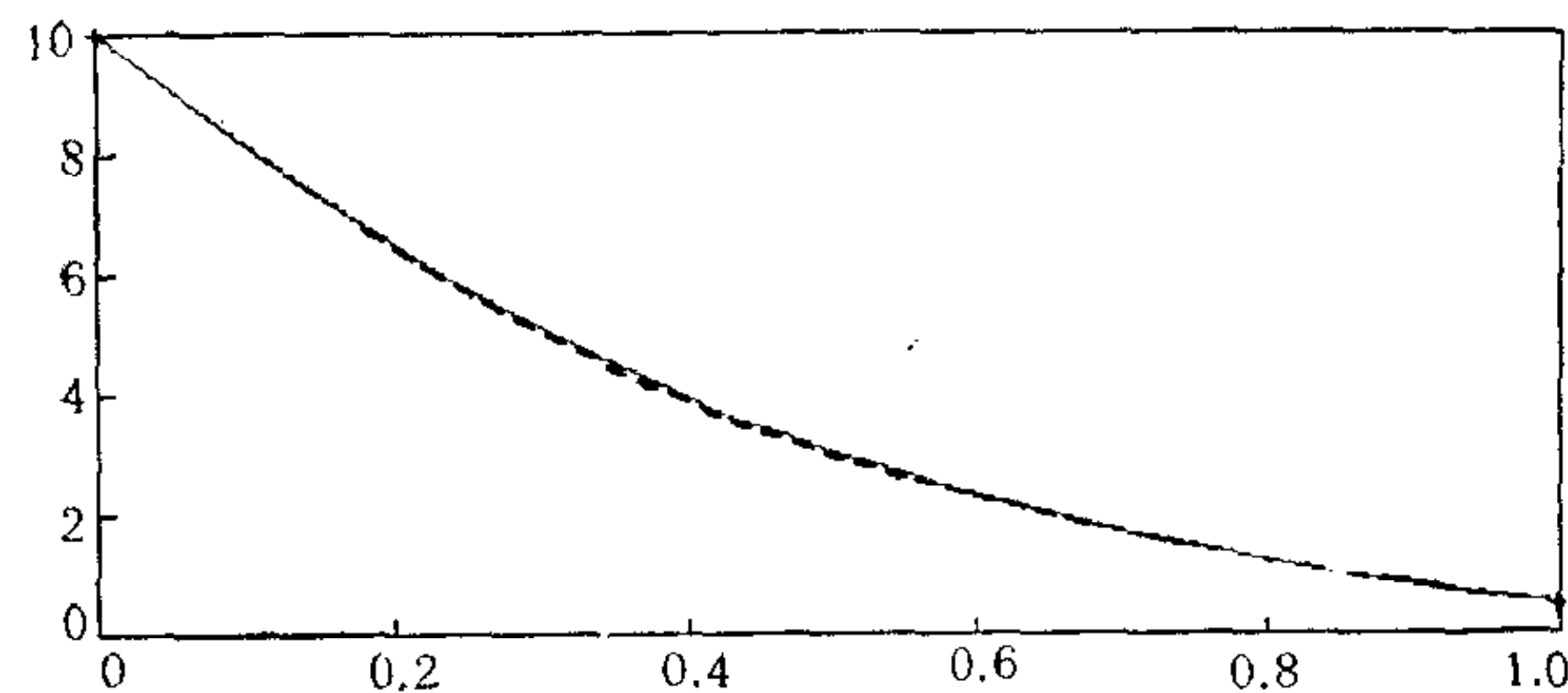
$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将这个系统分解成两个子系统, 然后每个变量用 Taylor 近似求解. 整个算法已由 PASCAL 语言编成, 在 PC386 通过. 级数近似的项数多少, 对最后的计算结果精度有影响, 取近似项数太少, 精度不够, 太多又会增加计算量. 根据作者的经验, 可在项数 6—15 之间选取. 整个递阶求解共用了 14 次迭代, 误差达到  $10^{-5}$ , 最初迭代时, 收敛较快, 以后到第 9 次迭代, 收敛慢下来, 误差基本稳定在  $10^{-5}$  点上, 出现这种情况的原因在于, 目标协调法的第二级采用了梯度法, 而梯度法在达到最优点附近时搜索相当缓慢. 得到的最



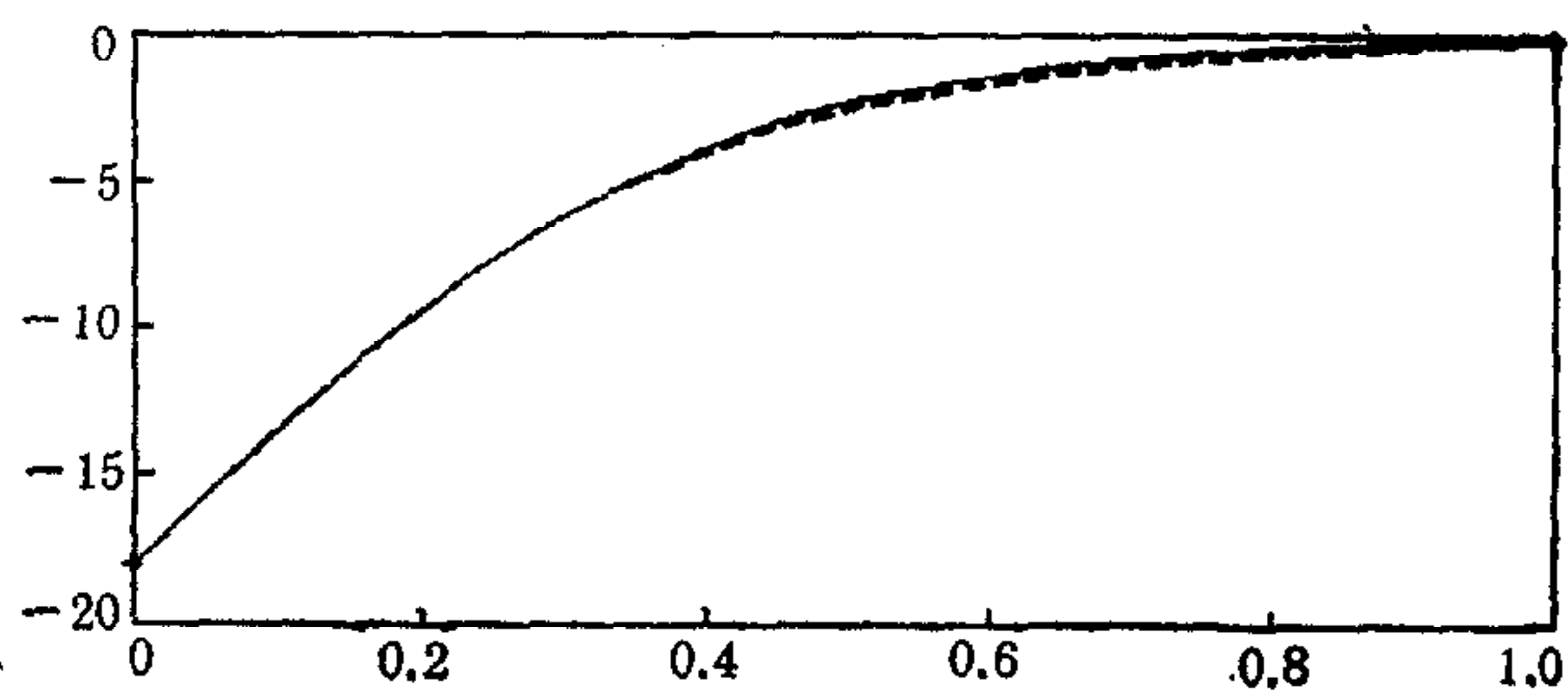
——文献[3]的结果    - - - - 本文结果

图1 最优状态  $x_1$

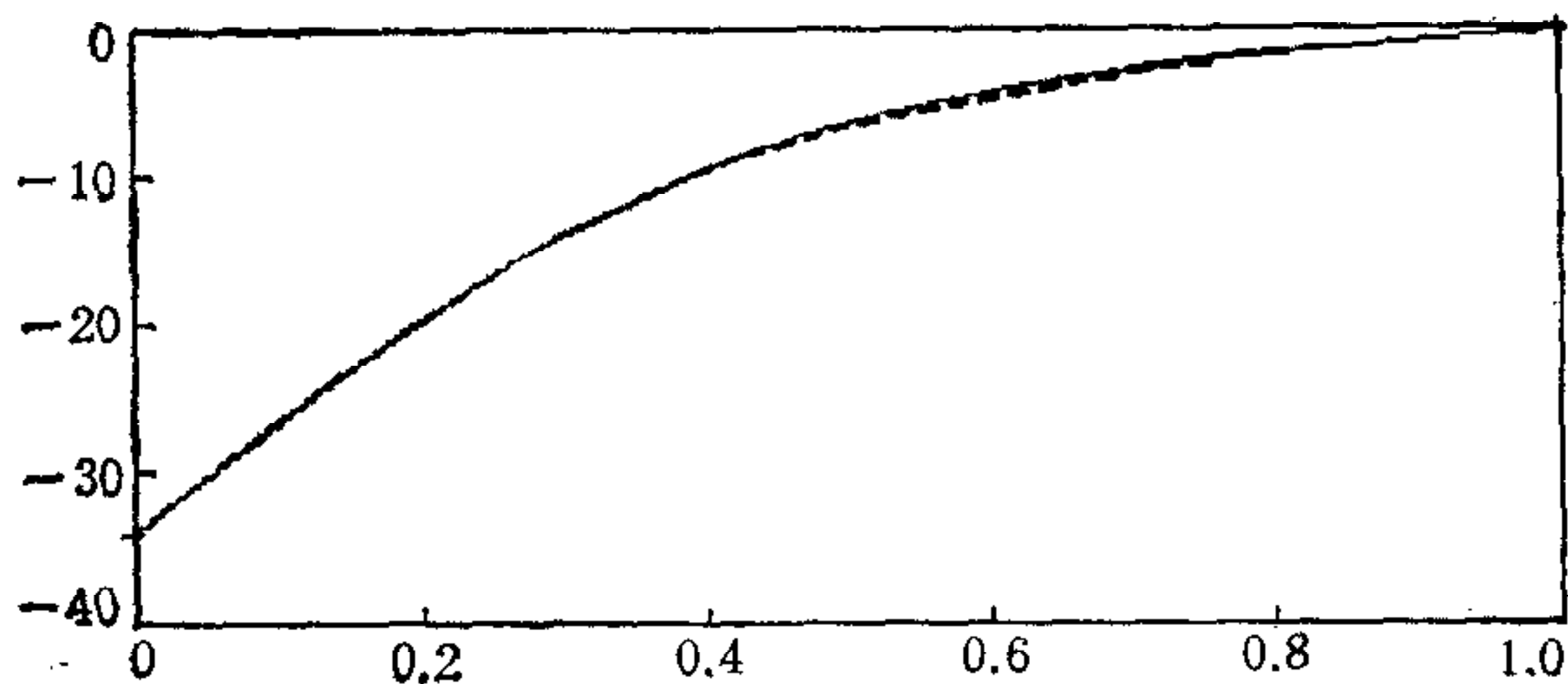


——文献[3]结果    - - - - 本文结果

图2 最优状态  $x_2$



—文献[3]结果    ----本文结果  
图3 最优控制  $u_1$



—文献[3]结果    ----本文结果  
图4 最优控制  $u_2$

优轨迹见图1—4。与文献[3]的结果相比是满意的。需要注意的是本文的方法是对时变问题的求解,这个问题用通常的方法是相当麻烦的。

致谢 审者提出的建议丰富了本文的内容。文中的某些结果采用了韩正之教授的建议。在此,作者一并表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Razzaghi M and Arabshahi A. Optimal control of linear distributed-parameter systems via polynomial series. *Int. J. Systems Sci.*, 1989, 20(7): 1141—1148.
- [2] Razzaghi M and Razzaghi M, Taylor series analysis of time-varying multi-delay systems. *Int. J. Control*, 1989, 50(1): 183—192.
- [3] Zhu J M and Lu Y Z. Novel approach to hierarchical control via single-term Walsh series method. *Int. J. Systems Sci.*, 1988, 19(9): 1859—1870.
- [4] 黄苏南,唐功友. Legendre 级数在大系统递阶控制中的应用,青岛化工学院学报,1991,12(2): 66—73.
- [5] 黄苏南,俞金寿. 泰勒级数在大系统递阶控制中的应用,自动化与仪器仪表,1992,(2): 15—18.
- [6] Abramowitz M and Stegun I A. Handbook of mathematical functions (Washington D. C., National bureau of Standards), 1967.
- [7] Singh M G and Titli A. Hierarchical feedback control for large dynamical systems. *Int. J. Systems Sci.*, 1977, 8(1): 31—47.



## NEW APPROACH FOR SOLVING LARGE-SCALE LINEAR TIME-VARYING SYSTEMS

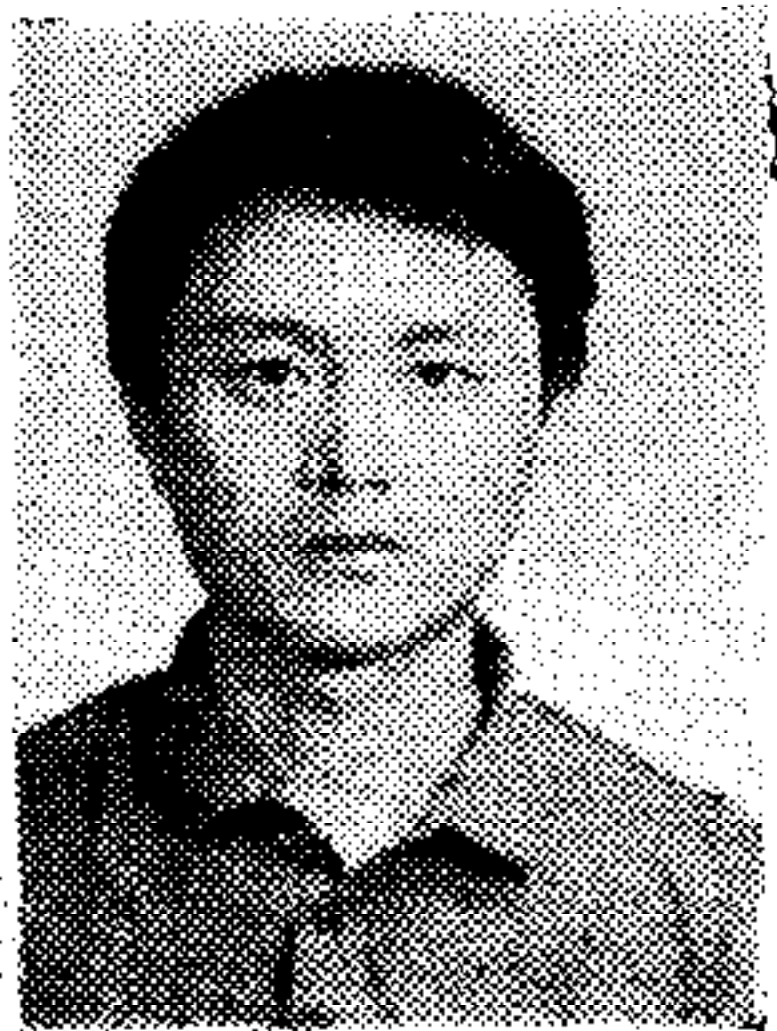
HUANG SUNAN      SHAO HUIHE

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University Shanghai 200030)

### ABSTRACT

This paper presents a new method of hierarchical control for large-scale linear time-varying systems via the Taylor series. The algorithm is simple in form and computationally advantageous. An illustrative example shows the applicability of the proposed method in practice.

**Key words:** Large-scale systems, Taylor series, hierarchical control.



**黄苏南** 1962年12月生。1991年6月毕业于华东理工大学自控系, 获得硕士学位。1994年6月毕业于上海交通大学自控系, 获博士学位。主要研究领域: 智能控制、鲁棒控制、大系统。



**邵惠鹤** 1960年毕业于华东理工大学。现任上海交通大学自动化研究所副所长、教授、博士生导师、中国自动化学会应用委员会和计算机应用委员会副主任、中国微生物学会生化过程模型化与控制学会副理事长。承担多项“七五”、“八五”国家重点科技攻关项目, 发表中外文学术论文100余篇, 出版学术著作10部, 获部市级科技进步奖8项。当前研究领域为: 工业过程建模与优化、多变量约束控制、广义推断控制、智能控制和神经网络等理论及其工业应用、计算机控制与优化集成系统等。