第 16 卷 第 3 期 1990 年 5 月
自动化学报 ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 16, No. 3 May, 1990

一种新的 Robust 分散输出反馈的设计法

陈浩勋　李人厚
（西安交通大学）

摘　要

本文提出了一种具有参数不确定性和结构摄动的大系统的模型框架，在此基础上讨论了 Robust 分散输出反馈律的设计方法. 它比文献[1]中的方法更合理，克服了该方法存在的保守性. 本文还用一个非线性电力系统的分散控制设计作为例子，进一步验证了所提出方法的优越性.

关键词——分散控制，鲁棒控制，大系统.

一、模型框架和 Robust 分散输出反馈律的设计

现引入系统模型如下:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_i(t) &= (A_{ii} + e_{ii}\widetilde{A}_{ii})x_i(t) + \sum_{j\neq i}^{N}(A_{ij} + e_{ij}\widetilde{A}_{ij})x_j(t) + (B_i + e_{B_i}\widetilde{B}_i)\boldsymbol{u}_i(t),\\ \boldsymbol{y}_i(t) &= (C_i + e_{C_i}\widetilde{C}_i)x_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, N.\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

式中 $e_{ij}(t)$、$e_{B_i}(t)$、$e_{C_i}(t)(-1 \leqslant e_{ij}, e_{B_i}, e_{C_i} \leqslant 1)$ 分别表示关联、输入和输出的摄动，所有系数矩阵 A_{ij}、B_i、C_i 表示系统参数的确定部分，而 $\widetilde{A}_{ij}$、$\widetilde{B}_i$、$\widetilde{C}_i$ 则表示系统参数的不确定部分，此值无法确切知道，但一般来说可估计其范围(如 $\|\widetilde{A}_{ij}\|$ 的上界).

记 $A = (A_{ij})_{N\times N}$, $\widetilde{A} = (\widetilde{A}_{ij})_{N\times N}$, $B = \text{Block diag}(B_1, B_2, \cdots, B_N)$, $\widetilde{B} = \text{Block diag}(\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \cdots, \widetilde{B}_N)$, $C = \text{Block diag}(C_1, C_2, \cdots, C_N)$, $\widetilde{C} = \text{Block diag}(\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \cdots, \widetilde{C}_N)$.

引入系统(模型)类:

$\mathscr{F}_s = \{S | S$ 由 (1.1) 式描述，(C, A, B) 给定已知，$(\widetilde{C}, \widetilde{A}, \widetilde{B}) \in \mathscr{F}\}$，其中 $\mathscr{F}$ 为 $R^{l\times n} \times R^{n\times n} \times R^{n\times m}$ 的一个子集.

定义 1.1. 称一个系统类 $\mathscr{F}_s$ 是渐近稳定的，若一切属于 $\mathscr{F}_s$ 中的系统 S 都渐近稳定.

定义 1.2. 称一控制律关于系统类 $\mathscr{F}_s$ 是 Robust 的，若 $\mathscr{F}_s$ 中的任一系统 S 加上此控制律后形成的闭环系统都渐近稳定.

以下考虑一类比较普遍的系统类:

$$\mathscr{F}_s = \{S | (C, A, B) \text{ 给定已知}, \|\widetilde{A}_{ij}\| \leqslant \xi_{ij}, \|\widetilde{B}_i\| \leqslant \xi_{B_i}, \|\widetilde{C}_i\| \leqslant \xi_{C_i}, \xi_{ij}, \xi_{B_i}, \xi_{C_i} \text{ 已知}, i, j = 1, 2, \cdots, N\}.$$

本文于 1987 年 7 月 7 日收到.

其中 A_{ij} 不再象文献[1]限定为零。

不失一般性，假定 $\widetilde{B}_i=\widetilde{C}_i=0$。首先，考虑加上局部输出反馈律后闭环系统类 $\mathscr{F}_s$ 的判稳问题。假定加入的局部输出反馈律 $\boldsymbol{u}_i=-K_i\boldsymbol{y}_i=-K_iC_i\boldsymbol{x}_i$，使 $A_{ii}-B_iK_iC_i$ 稳定，则存在唯一的正定矩阵 P_i 使：

$$P_i(A_i-B_iK_iC_i)+(A_i-B_iK_iC_i)^TP_i+I_i=0, \tag{1.2}$$

其中 I_i 为适当维数的单位阵，A_i 即 A_{ii}。

加反馈后，$\mathscr{F}_s$ 中的系统可写成：

$$S^*:\ \dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=(A_i-B_iK_iC_i+e_{ii}\widetilde{A}_{ii})x_i(t)+\sum_{j\neq i}^{N}(A_{ij}+e_{ij}\widetilde{A}_{ij})x_j(t).$$

令
$$V(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{x}_i^TP_i\boldsymbol{x}_i,\quad \lambda_i>0,\quad i=1,2,\cdots,N,$$

则 $V(\boldsymbol{x})$ 正定，经推导可得：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})|_{S^*}\leqslant \boldsymbol{x}^TH_1x+\boldsymbol{x}^TH_2\boldsymbol{x}, \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1^T,x_2^T,\cdots,x_N^T)^T$，$\|\cdot\|$ 为矩阵或向量的 2-范数。

$$H_1=(H_{ij}^1)_{N\times N},\quad H_2=\text{Block diag}(h_1I_1,h_2I_2,\cdots,h_NI_N),$$
$$H_{ij}^1=\lambda_iP_iA_{ij}+\lambda_jA_{ji}^TP_j,\ (i\neq j),\quad H_{ii}^1=0,$$
$$h_i=-\lambda_i+\lambda_i\|P_i\|\left(2\xi_{ii}+\sum_{j\neq i}^{N}\xi_{ij}\right)+\sum_{j\neq i}^{N}\lambda_j\|P_j\|\xi_{ji}.$$

因为 P_i 对称正定，故在这里 $\|P_i\|=\lambda_M(P_i)$，记 $H=H_1+H_2$，H 为对称阵，于是有：

命题 1.1. 解耦系统稳定的局部输出反馈律 $\boldsymbol{u}_i=-K_i\boldsymbol{y}_i$ 若使 $\lambda_M(H)<0$，则它关于 $\mathscr{F}_s$ 是 Robust 的。

命题 1.1 中的 $\lambda_M(H)$ 值的大小在一定程度上反映了闭环系统类 $\mathscr{F}_s$ 的 Robust 性的好坏，$\lambda_M(H)$ 值越小(越负)，意味着 Robust 性越好，故 $\lambda_M(H)$ 可看作是所加控制律 Robust 性的一种衡量指标。因为 $\lambda_M(H)$ 直接由各局部反馈增益阵 K_i 所决定，故设计关于 $\mathscr{F}_s$ 为 Robust 的局部输出反馈律，一个自然的想法是，通过改进 K_i 及 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)\left(\text{以下约定}\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i=N\right)$，使 $\lambda_M(H)$ 不断减小，最后达到 $\lambda_M(H)<0$ 来实现；而减小 $\lambda_M(H)$ 可采用梯度下降的方法。

下面求梯度 $\partial\lambda_M(H)/\partial K_i$ 和 $\partial\lambda_M(H)/\partial\lambda_i$。

因为H对称，故其左右特征向量相同。记 $\lambda_M(H)$ 对应的左右单位特征向量为 $\xi_H=(\xi_H^{1T},\xi_H^{2T},\cdots,\xi_H^{NT})^T$，其中 $\xi_H^i\in R^{n_i}$，n_i 为第 i 个子系统的状态维数。

经过推导可得：

$$\Delta\lambda_M(H)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\text{tr}(\Delta P_i\cdot\overline{X}_0^i), \tag{1.4}$$

其中
$$\overline{X}_0^i=\gamma_iX_0^i+\widetilde{X}_0^i, \tag{1.5}$$

$$\gamma_i=2\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_{ij}\right)\xi_H^{iT}\cdot\xi_H^i. \tag{1.6}$$

$X_0^i = \xi_P^i \xi_P^{iT}$，$\xi_P^i$ 是 P_i 的最大特征值 $\lambda_M(P_i)$ 所对应的单位特征向量.

$$\widetilde{X}_0^i = \sum_{j\neq i}^{N} (A_{ij}\xi_H^i\xi_H^{iT} + \xi_H^i\xi_H^{iT}A_{ij}^T). \tag{1.7}$$

由于 P_i 与 $K_j(j\neq i)$ 无关，从 Levine 和 Athans[8] 知：

$$\partial\lambda_M(H)/\partial K_i = \lambda_i\overline{G}_i. \tag{1.8}$$

$\overline{G}_i$ 由以下二个矩阵 Lyapunov 方程得出：

$$P_i(A_i - B_iK_iC_i) + (A_i - B_iK_iC_i)^TP_i + I_i = 0, \tag{1.9}$$

$$(A_i - B_iK_iC_i)L_i + L_i(A_i - B_iK_iC_i)^T + \overline{X}_0^i = 0 \tag{1.10}$$

$$\overline{G}_i = -B_i^TP_iL_iC_i^T. \tag{1.11}$$

同样可得，$\lambda_M(H)$ 关于 λ_i 的梯度为：

$$\frac{\partial\lambda_M(H)}{\partial\lambda_i} = -\xi_H^{iT}\xi_H^i + \sum_{j\neq i}^{N}\mathrm{tr}(P_iA_{ij}\xi_H^i\xi_H^{iT} + \xi_H^i\xi_H^{iT}A_{ij}^TP_i) + \gamma_i\mathrm{tr}(P_iX_0^i). \tag{1.12}$$

二、求分散输出反馈律的算法

有了上节(1.8)和(1.12)二个梯度的计算式，现在提出如下的设计算法：

step 0：求 K_i^0 使 $A_i - B_iK_i^0C_i$ 稳定。置 $K_i = K_i^0$，$\lambda = \lambda^0 = (1, 1, \cdots, 1)$.

step 1：解各子系统的 Lyapunov 矩阵方程(1.9)，求 H 和 $\lambda_M(H)$. 若 $\lambda_M(H) < 0$，且设计结果满意，则终止；若 $\lambda_M(H) < 0$，但设计结果不满意，则返回 step 0 重新选择 K_i^0. 否则，判断 λ 是否已更新过。若已更新过，则转向 step 2；若未更新过，则计算 $\theta_i = \partial\lambda_M(H)/\partial\lambda_i$，$\delta_\lambda$，更新 λ，转向 step 1.

step 2：计算 γ_i、$\widetilde{X}_0^i$、$\overline{X}_0^i$，解各子系统的 Lyapunov 矩阵方程(1.10)，求 $\widetilde{G}_i = \lambda_i\overline{G}_i$，改进 $K_i = K_i - \delta_i\widetilde{G}_i$ (δ_i 为步长)，转向 step 1.

引理 2.1. 若 $\lambda_M(H)$ 是关于 $\lambda\in\Lambda(P)$，$K\in\Omega(S)$ 的连续可微函数，$\lambda^l\in\Lambda(P)$，$K^l\in\Omega(S)$，则

(1) 若对某对 i, j，$\theta_i\neq\theta_j$，则存在步长 $\delta_\lambda > 0$，使 $\lambda^{l+1}\in\Lambda(P)$，且 $\lambda_M(H)(K^l, \lambda^{l+1}) < \lambda_M(H)(K^l, \lambda^l)$.

(2) 存在 $\delta_i > 0$，使 $K_i^l\in\Omega_i(S)$，且

$$\lambda_M(H)(K^{l+1}, \lambda^{l+1}) < \lambda_M(H)(K^l, \lambda^{l+1}).$$

其中 K^l、λ^l 表示 K、λ 第 l 次迭代的取值.

当不能用纯局部输出反馈完成上述的 Robust 设计时，可以采用二层控制策略，即再加上一层非局部输出反馈。非局部输出反馈增益阵 $K_{ij}(i\neq j)$ 的设计法如下.

把判稳阵 H 表达式中的 $A_{ij}(j\neq i)$ 换成 $A_{ij} - B_iK_{ij}C_j$，利用 $\lambda_M(H)$ 关于 K_{ij} 的梯度：

$$\frac{\partial\lambda_M(H)}{\partial K_{ij}} = -B_i^TP_i\xi_H^i\xi_H^{iT}C_j^T,\quad j\neq i,$$

来迭代改进 K_{ij} 使 $\lambda_M(H)$ 进一步减小.

三、用于非线性系统控制设计的数值实例

首先引入非线性系统的参数带不确定性的线性化模型 PULM.

设非线性系统的非线性模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = f_i(\boldsymbol{x}) + B_i\boldsymbol{u}_i,$$
$$\boldsymbol{y}_i = C_i\boldsymbol{x}_i,\quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{3.1}$$

在我们所关心的非线性区域 $B(x^0, \rho) = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| \leqslant \rho\}$，它可表示成参数带不确定性的线性化模型 PULM:

$$\dot{x}_i = (A_{ii} + \tilde{A}_{ii})x_i + \sum_{j \neq i}^{N} (A_{ij} + \tilde{A}_{ij})x_j + B_i u_i,$$
$$y_i = C_i x_i \qquad i = 1, 2, \cdots, N, \tag{3.2}$$

相应的 $\mathscr{F}_S = \{S \mid S$ 由 (3.2) 式描述，(C, A, B) 给定，$\|\tilde{A}_{ij}\| \leqslant \xi_{ij}$，$\|\tilde{B}_i\| = \|\tilde{C}_i\| = 0\}$. 其中 x^0 是系统 (3.1) 当 $u_i = 0$ 时的平衡点，$\xi_{ij} = \max\limits_{x \in B(x^0, \varphi)} \|\nabla f_{ij}(\boldsymbol{x}) - \nabla f_{ij}(\boldsymbol{x}^0)\|$，$\nabla f_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$.

命题 3.1. 对非线性系统(3.1)在非线性区域 $B(x^0, \varphi)$ 上的 PULM (3.2) 及相应的 $\mathscr{F}_S$，若 $u_i = -\tilde{K}_i y_i$ 为用第一、二节提出的设计法设计得到的关于 $\mathscr{F}_S$ 的 Robust 分散输出反馈律，则原非线性系统(3.1)加上这一控制律后形成的闭环系统在 $B(x^0, \varphi)$ 区域渐近稳定.

参 考 文 献

[1] Siljak, D. D. and Sundareshan, M. K., A multilevel Optimization of Large Scale Dynamic Systems, *IEEE Trans. on Aut. Contr.* **21**(1976), 1, 79—84.

[2] Hassan, M. F. and Singh, M. G., A Hierarchical Structure for Computing Near Optimal Decentralised Control, *IEEE Trans. on SMC,* 8(1978), 7, 575—579.

[3] Hassan, M. F. and Singh, M. G., Decentralised Controller with On-line Interactive Trajective Improvement, *Proc. IEE,* **127**(1980), 3, 142—148.

[4] Geromel, J. C. and Bernussou, J., An Algorithm for Optimal Decentralised Regulation of Linear Quadratic Interconnected Systems, *Automatica,* **15**(1979), 4, 489—491.

[5] Davison, E. J. and Gesing, W., Sequential Stability and Optimization of Large Scale Decentralised Systems, *Automatica,* **15**(1979), 3, 307—324.

[6] Ikeda, M. Siljak, D. D. and White, C., Decentralised Control of Systems with Overlapping Information Sets, JOTA, **34**(1981), 2, 279—310.

[7] Siljak, D. D., Large Scale Dynamic Systems, North Holland (1978).

[8] Levine, W. and Athans, M., On the Determination of Optimal Output Feedback Gains for Linear Systems, *IEEE Trans. on AC,* **15**(1970), 1, 44—48.

A NEW METHOD FOR DESIGNING ROBUST DECENTRALIZED OUTPUT FEEDBACK CONTROL LAWS

CHEN HAOXUN　LI RENHOU

(Xi'an Jiaotong University)

ABSTRACT

In the paper, a model frame describing large scale systems with parameter uncertainty and structure perturbation is proposed. Based on the frame, a new kind of robust decentralized output feedback design method is discussed. It is much more reasonable and less conservative than the multilevel method of Siljak and Sundareshan. An example of control design for a nonlinear power system is given to illustrate the advantages of the method.

Key word ——Decentralized control; robust control; large scale systems.

《大系统理论及其应用》评介

进入八十年代以来，不少高等院校为自动控制、系统工程等专业开设了“大系统理论”课程，同时着手编写教材，1988 年出版的清华大学陈禹六教授编著的《大系统理论及其应用》就是其中之一．全书 55 万余字，由清华大学出版社出版．它是该出版社的《信息、控制与系统》系列教材之一．

该书是做为电类专业和系统工程专业研究生教材而编写的，吸收了不久前出版的国外同类教材的优点，如 Jamshidi, M., “Large Scale System: Modeling and Control” 等书的一些内容和长处．全书共分十章．第一章（绪言）说明什么是“大系统”，其他各章分别叙述大系统的建模与模型简化（第二、三章）、分级递阶控制（第四、五章）、分散控制（第六章）、大系统的稳定性和能控能观性（第七章）、状态估计和随机控制（第八章）以及大系统控制的计算机实现（第十章）．作者为了使该书内容不仅限于大系统的控制问题，还编写了“大系统理论与系统工程”一章（第九章），介绍了与前述控制方法不同的建模和优化问题．由此可见，该书内容广泛而新颖，丰富而全面，这是该书的一个特点．

从内容上看，该书的体系侧重于大系统的控制和优化，同时能面向理工科许多专业的研究生，包括经济管理、环境保护、热能、化工、水利等专业．为此，编著者将线性规划、最优控制和估值滤波等方面的基本知识提纲挈领地做了介绍，这是该书的第二个特点．因此，该书对许多专业的研究生、大学高年级学生和工程技术人员都有一定参考价值．

最后，希望本书再版时增加一些应用方面的材料，并适当吸收国内学者的研究成果．

西安交通大学　万百五