第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0960-03 **文献标识码**: **A**

Stone 代数的 Cayley 表示定理

罗 从 文
(三峡大学数学系，湖北 宜昌 443002)
(E-mail: lcw@ctgu.edu.cn)

摘 要: 首先通过集代数得到了 Stone 代数的表示定理，然后证明了每一个 Stone 代数均嵌入到某个集合 X 上的一个 Stone 映射类 S 中.

关键词: 分配格; Stone 代数; Stone 映射类.
MSC(2000): 06D30
中图分类: O153.1

一个 Stone 代数 $(A,\vee,\wedge,^*,0,1)$ (简记为 A) 是一个带有伪补运算 * 且满足条件: $0^{**}=0$, $a\wedge 0^*=a$, $a\wedge(a\wedge b)^*=a\wedge b^*$, $a^*\vee a^{**}=1$ 的有界分配格 $(A,\vee,\wedge,0,1)$.

S.L. Bloom, Z.Ésik 和 E.G. Manes[1] 成功地将著名的群的 Cayley 表示定理推广到 Boole 代数的情形. 而 Ternary 代数和 Stone 代数是 Boole 代数的推广 [2]. Z.Ésik[3] 给出了 Ternary 代数的 Cayley 表示定理. 本文在文献 [3] 的基础上证明了每一个 Stone 代数均嵌入到某个集合 X 上的一个 Stone 映射类 S 中.

设 X 是一个集合， $S(X)=\{(A,B)\in X\times X\mid A\subseteq B\}$. 定义

$$(A_1,B_1)\cup(A_2,B_2)=(A_1\cup A_2,B_1\cup B_2),$$

$$(A_1,B_1)\cap(A_2,B_2)=(A_1\cap A_2,B_1\cap B_2),$$

$$(A,B)^*=(X\setminus B,X\setminus B).$$

显然， $(S(X),\cup,\cap,^*,(\emptyset,\emptyset),(X,X))$ 是一个 Stone 代数.

定理 1 每一个 Stone 代数都能嵌入到某一个 Stone 代数 $S(X)$ 中.

证明 设 A 是一个 Stone 代数， X 表示 A 的所有素理想构成的集合， X_a 表示 A 的不含元素 $a\in A$ 的素理想的全体. 由于 $X_a\subseteq X_{a^{**}}$, 因此 $(X_a,X_{a^{**}})\in S(X)$. 因为 $X_{a\vee b}=X_a\cup X_b, X_{a\wedge b}=X_a\cap X_b, X_{a^*}=X\setminus X_{a^{**}}$, 所以， $a\to(X_a,X_{a^{**}})$ 是从 A 到 $S(X)$ 的一个同态映射且为单同态.

设 X 是一个集合，一个从 X^3 到 X 的映射组成的类 S 叫做一个 Stone 映射类，若下面诸条件成立:

(1) 投影映射 $\pi_1:X^3\to X,(x,y,z)\to x$ 和 $\pi_3:X^3\to X,(x,y,z)\to z$ 在 S 中.

(2) S 关于合成运算封闭，即若 f,g_1,g_2,g_3 在 S 中，则映射 $h:X^3\to X$ 也在 S 中，其中 h 定义如下: $h(x,y,z)=f(g_1(x,y,z),g_2(x,y,z),g_3(x,y,z))$, $\forall x,y,z\in X$.

收稿日期: 2005-03-30; **接受日期**: 2005-07-19
基金项目: 湖北省教育厅自然科学基金项目 (2004D006).

(3) S 中的每个映射 f 是幂等的，即 $f(x,x,x)=x,\forall x\in X$.

(4) 任何两个映射 $f,g\in S$ 是可换的，即

$$f(g(x_1,x_2,x_3),g(y_1,y_2,y_3),g(z_1,z_2,z_3))=g(f(x_1,y_1,z_1),f(x_2,y_2,z_2),f(x_3,y_3,z_3)),$$

$$\forall x_i,y_i,z_i\in X,i=1,2,3.$$

(5) 每个映射 $f\in S$ 是对角线的，即

$$f(f(x_1,x_2,x_3),f(y_1,y_2,y_3),f(z_1,z_2,z_3))=f(x_1,y_2,z_3),\quad \forall x_i,y_i,z_i\in X,i=1,2,3.$$

假设 S 是集合 X 上的 Stone 映射类. 在 S 上定义 $\vee,\wedge,^*$ 如下：对于 $f,g\in S$ 和 $x,y,z\in X$,

$$(f\wedge g)(x,y,z)=f(g(x,y,z),g(y,y,z),z),$$

$$(f\vee g)(x,y,z)=f(x,g(x,y,y),g(x,y,z)),$$

$$f^*(x,y,z)=f(z,z,x).$$

命题 1 设 S 是集合 X 上的 Stone 映射类，则 S 关于上面的运算和常数 π_1,π_3 构成一个 Stone 代数.

证明 根据文献 [3] 知 S 关于上面定义的运算 $\wedge,\vee$ 和常数构成一个有界分配格，其中 π_3 是最小元， π_1 是最大元. 又

(1) $\pi_3^{**}(x,y,z)=\pi_3(x,y,z)$;

(2) $(f\wedge\pi_3^*)(x,y,z)=f(\pi_3^*(x,y,z),\pi_3^*(y,y,z),z)=f(\pi_3(z,z,x),\pi_3(z,z,y),z)=f(x,y,z)$;

(3) 因为

$$\begin{aligned}(f\wedge(f\wedge g)^*)(x,y,z)&=f((f\wedge g)^*(x,y,z),(f\wedge g)^*(y,y,z),z)\\&=f((f\wedge g)(z,z,x),(f\wedge g)(z,z,y),z)\\&=f(f(g(z,z,x),g(z,z,x),x),f(g(z,z,y),g(z,z,y),y),z)\\&=f(g(z,z,x),g(z,z,y),z),\\(f\wedge g^*)(x,y,z)&=f(g^*(x,y,z),g^*(y,y,z),z)=f(g(z,z,x),g(z,z,y),z).\end{aligned}$$

所以， $(f\wedge(f\wedge g)^*)(x,y,z)=(f\wedge g^*)(x,y,z)$;

(4)

$$\begin{aligned}(f^{**}\vee f^*)(x,y,z)=&f^{**}(x,f^*(x,y,y),f^*(x,y,z))=f^{**}(x,f(y,y,x),f(z,z,x))\\&=f^*(f(z,z,x),f(z,z,x),x)=f(x,x,f(z,z,x))\\&=f(x,x,x)=x.\end{aligned}$$

这样， S 关于上面的运算和常数构成一个 Stone 代数.

假设 $(L,+,\cdot,0,1)$ 是一个有界分配格 (这里的 $+$ 表示 $\vee$, $\cdot$ 表示 $\wedge$). 令 M_L 表示集合 $\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_i\in L,a_ia_j=0,i\neq j,a_1+a_2+a_3=1\}$.

设 $a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3)\in M_L$. 定义 $a+b$ 和 ab 为如下矩阵乘积

$$a+b=(a_1,a_2,a_3)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\b_1&b_2+b_3&0\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix},$$

$$ab=(a_1,a_2,a_3)\cdot\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\\0&b_1+b_2&b_3\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$a^*=(a_3,0,a_1+a_2).$$

令 $\mathbf{0}=(0,0,1),\mathbf{1}=(1,0,0)$. 注意到两个常数 $\mathbf{0},\mathbf{1}\in M_L$. 而且 M_L 在上面定义的加法、乘法和伪补运算下封闭.

命题 2 设 $(L,+,\cdot,0,1)$ 是一个有界分配格. 则 M_L 按照上面定义的加法、乘法和伪补运算以及常数构成一个 Stone 代数.

证明 令 D_L 表示所有如下映射构成的族

$$if_a: L^3\to L,\quad (x,y,z)\mapsto a_1x+a_2y+a_3z,$$

其中 $a=(a_1,a_2,a_3)\in M_L$. 则根据文献 [3] 知 D_L 是一个 Stone 映射类. 由命题 1 知 D_L 是一个 Stone 代数. 因为从 M_L 到 D_L 的映射 $a\mapsto if_a$ 是一个同构映射, 所以 M_L 同构于 D_L, 因此 M_L 也是一个 Stone 代数.

对于每个集合 X, $S(X)$ 同构于 M_L, 其中 L 是 X 的所有子集域. 事实上,

$$S(X)\to M_L,\quad (A_1,A_2)\to(A_1,A_2\setminus A_1,X\setminus A_2)$$

是一个同构映射. 这样从定理 1 得到

推论 每个 Stone 代数能嵌入到某个 M_L 中.

定理 2 A 是一个 Stone 代数当且仅当存在某个集合 X 上的一个 Stone 映射类 S 使得 A 嵌入到 S 中.

证明 若 A 嵌入到 S 中, 其中 S 是某个集合上 X 的一个 Stone 映射类, 则 A 是一个 Stone 代数. 反过来, 若 A 是一个 Stone 代数, 则由推论知 A 嵌入到某个 Stone 代数 M_L 中, 其中 L 是一个有界分配格. 但 M_L 同构于 D_L. □

参考文献:

[1] BLOOM S L, ÉSIK Z, MANES E G. *A Cayley theorem for Boolean algebras* [J]. Amer. Math. Monthly, 1990, **97**(9): 831–833.
[2] BALBES R, DWINGER P. *Distributive Lattices* [M]. University of Missouri Press, Columbia, 1974.
[3] ÉSIK Z. *A Cayley theorem for ternary algebras* [J]. Internat. J. Algebra Comput., 1998, **8**(3): 311–316.

A Cayley Representation Theorem for Stone Algebras

LUO Cong-wen
(Department of Mathematics, China Three Gorges University, Hubei 443002, China)

Abstract: We get the representation theory for Stone algebras by set algebras and show that every Stone algebra can be embedded in a class of Stone functions on some set.

Key words: distributive lattice; Stone algebra; class of Stone function.