

微扰变分法对光折变空间孤子相互作用的研究*

陈守满^{1,2}, 石顺祥¹, 董洪舟¹

(1 西安电子科技大学 技术物理学院, 西安 710071)

(2 安康学院 光电子技术研究室, 陕西 安康 725000)

摘 要:利用微扰变分法研究了光折变屏蔽孤子的相干相互作用, 得出了光折变空间屏蔽孤子在晶体中同相相互作用时发生第一次碰撞的位置和碰撞周期解析表达式, 并对孤子同相和反相相互作用的物理机制进行了分析. 研究表明: 当两孤子尾部重叠时就会发生相互作用, 相互作用力的大小与孤子的相对强度、相对间距以及晶体外加电场的大小有关. 孤子的相对强度越大、相对间距越小以及晶体外加电场越强, 孤子间相互作用力越大; 相互作用力的性质与初始相位差有关, 同相相互吸引, 反相相互排斥.

关键词:光折变空间屏蔽孤子; 相互作用; 微扰变分法

中图分类号: O43

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2008)01-0025-5

0 引言

在较低的入射功率下, 外加直流偏压的光折变晶体中可以支持空间屏蔽孤子的形成和传播^[1-4]. 这是由于激光束在晶体内部光照区产生光激发电荷, 这些电荷经迁移形成空间电荷场屏蔽了外加直流电场, 从而调制了晶体内部折射率并形成空间屏蔽孤子. 由于空间屏蔽孤子具有稳定性, 并且易于在低功率下形成和控制, 因此常作为孤子理论实验验证的有用工具.

由于空间孤子在全光开关、三维光互连和波导应用等领域的潜在应用, 对空间孤子的研究, 特别是对孤子的相互作用的研究引起了人们的浓厚兴趣. 光孤子间的相互作用与粒子间的相互作用非常类似, 因此, 光折变空间孤子的相互作用特性是光折变空间孤子现象中最吸引人的特性. 在线性介质中, 一束光可以穿过另一束光不因其它光束的存在而受到影响. 相反, 在非线性介质中, 空间孤子间能够能量交换、互相约束、互相缠绕进动, 显示出许多吸引人的与相互作用有关的现象. 这些现象有可能实现光控光、无门光逻辑计算和光路由等. 因此, 对空间光孤子相互作用特性的全面研究和彻底掌握, 显然具有重要的学术价值和实用价值. 对于光孤子的相互作用的研究, 文献[5-8]给出了实验研究并进行数值模拟. 但根据实验结果看来, 要很好地解释实验, 必须作进一步分析. 本文利用微扰变分法^[9-10]研究了小光强入射光折变空间屏蔽孤子的相干相互作用, 给出了光折变空间屏蔽孤子相互作用的解析分

析, 对孤子同相和反相相干相互作用的物理机制进行了分析.

1 光折变空间屏蔽孤子相互作用的微扰变分描述

在外加直流电场的光折变晶中, 当光波归一化相对光强 $|u|^2 \ll 1$ 时, 光波演化方程可以简化成^[11]

$$iu_\xi + \frac{1}{2}u_{ss} - \beta u + \beta |u|^2 u = 0 \quad (1)$$

式中, β 为晶体外加直流电场参量, 下标 ξ, s 分别表示对纵向(传播维)和横向(衍射维)归一化坐标的微分.

式(1)的行波解为

$$u(s, \xi) = r \operatorname{sech}[r(s - q)] \exp[i\phi - i\delta s] \quad (2)$$

从物理上讲, 在晶体中当两个孤子靠得足够近以至于尾部重叠时, 就会发生相互影响. 当式(1)受到微扰时, 其孤子解的四个参量将被修改, 假定沿 ξ 方向缓慢变化, 从数学上讲, 晶体中的总光场为

$$u = u_1 + u_2 \quad (3)$$

其中

$$u_j(s, \xi) = r_j(\xi) \operatorname{sech}\{r_j(\xi)[s - q_j(\xi)]\} \times \exp[i\phi_j(\xi) - i\delta_j(\xi)s] \quad (j = 1, 2) \quad (4)$$

把式(3)代入式(1)中并分解成两部分, 得到

$$i \frac{\partial u_j}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2} - \beta(1 - |u_j|^2)u_j = -\beta(u_k^* u_j^2 + 2|u_j|^2 u_k) \quad (j, k = 1, 2, j \neq k) \quad (5)$$

式(5)中右边的项可以看成微扰, 它与相邻两孤子的非线性作用有关. 当无微扰项时, r 和 δ 是常数, 通过简单的解常微分方程得到

$$\frac{dq}{d\xi} = -\delta \quad (6)$$

* 陕西省教育厅专项基金(04JK309)资助

Tel: 13891592505 Email: chenshouman@sohu.com

收稿日期: 2006-07-03

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\beta - \frac{\delta^2}{2} - \frac{r^2}{2} + \beta r^2 \quad (7)$$

积分式(6)、(7)可以得到 $q(\xi)$ 和 $\phi(\xi)$, 就得到无微扰项时的解.

通过构造欧拉-拉格朗日方程把式(5)表达为一个变分问题

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial L}{\partial X_\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial L}{\partial X_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = 0 \quad (8)$$

式中的 X 代表 u 或 u^* , 下标 ξ 和 s 表示与该变量有关的微分, 拉格朗日密度由

$$L = \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{i}{2} (u_j \frac{\partial u_j^*}{\partial \xi} - u_j^* \frac{\partial u_j}{\partial \xi}) + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_j}{\partial s} \right|^2 + \beta |u_j|^2 \right\} + \beta (u_1 u_2^* + u_1^* u_2) (|u_1|^2 + |u_2|^2) \quad (9)$$

给出. 若取 $X = u^*$ 式(8)就变成式(5). 文献[10]中的式(11)与本文的式(9)相比多了两项 $|u_1|^4 + |u_2|^4$, 按照文献[10]的表达, 若取 $X = u^*$ 式(8)不可能变成式(5).

拉格朗日密度对 s 积分

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} L ds = \int_{-\infty}^{\infty} L_1 ds + \int_{-\infty}^{\infty} L_2 ds = \sum_{j=1}^2 \cdot (2r_j \frac{d\phi_j}{d\xi} + \frac{r_j^3}{3} + r_j \delta_j^2 + 2\beta r_j) + \int_{-\infty}^{\infty} L_2 ds \quad (10)$$

式中

$$L_2 = \beta [r_1^3 r_2 \operatorname{sech}^3(Z_1) \operatorname{sech}(Z_2) + r_2^3 r_1 \operatorname{sech}^3(Z_2) \operatorname{sech}(Z_1)] \cos[\phi_2 - \phi_1 - s(\delta_2 - \delta_1)] \quad (11)$$

式中 $Z_1 = r_1(s - q_1)$, $Z_2 = r_2(s - q_2)$

2 变分方程组

利用式(8)~(11), 分别对孤子解的四个参量 r, δ, q, ϕ 求变分, 可得到下面四个常微分方程组

$$\frac{dr_j}{d\xi} = -\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \beta (u_k^* u_j^2 + 2|u_j|^2 u_k) u_j^* ds = - \int_{-\infty}^{\infty} \beta r_j^3 r_k \operatorname{sech}^3 Z_j \operatorname{sech} Z_k \sin \theta_j ds \quad (12)$$

$$\frac{d\delta_j}{d\xi} = -\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} [\beta (u_k^* u_j^2 + 2|u_j|^2 u_k) \cdot \tanh[r_j(s - q_j)] u_j^*] ds = - \int_{-\infty}^{\infty} (3\beta r_j^3 r_k \cdot \operatorname{sech}^3 Z_j \operatorname{sech} Z_k \tanh Z_j \cos \theta_j) ds \quad (13)$$

$$\frac{dq_j}{d\xi} = -\delta_j - \frac{1}{r_j} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} [\beta (u_k^* u_j^2 + 2|u_j|^2 u_k) \cdot (s - q_j) u_j^*] ds = -\delta_j - \int_{-\infty}^{\infty} (\beta r_j^2 r_k Z_j \cdot \operatorname{sech}^3 Z_j \operatorname{sech} Z_k \sin \theta_j) ds \quad (14)$$

$$\frac{d\phi_j}{d\xi} = -\beta - \frac{\delta_j^2}{2} - \frac{r_j^2}{2} + \beta r_j^2 + q_j \frac{d\delta_j}{d\xi} - \frac{1}{r_j} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \{ (1 - r_j \cdot (s - q_j) \tanh[r_j(s - q_j)]) u_j^* \beta (u_k^* u_j^2 + 2|u_j|^2 \cdot u_k) \} ds = -\beta - \frac{\delta_j^2}{2} - \frac{r_j^2}{2} + \beta r_j^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \{ 3\beta r_j^3 r_k [1 - (Z_j - q_j) \tanh Z_j] \operatorname{sech}^3 Z_j \operatorname{sech} Z_k \cos \theta_j \} ds \quad (15)$$

式中 $\theta_j = \phi_k - \phi_j - s(\delta_k - \delta_j)$, $j, k = 1, 2, j \neq k$.

考虑到实验的对称性, 假定入射孤子是等振幅的. 则可以利用积分近似公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^3 Z \operatorname{sech}(Z + 2q) dZ \approx 4 \exp(-2q)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^3 Z \operatorname{sech}(Z + 2q) \tanh Z dZ \approx -\frac{4}{3} \exp(-2q)$$

并作如下近似约定及符号规定

$|a| \ll r, |\delta| \ll w, q|a| \ll r, |\delta|q \ll w$ 式中,

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}, a = \frac{r_1 - r_2}{2}$$

$$w = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \delta = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}$$

$$q = \frac{q_1 - q_2}{2}, \phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$$

则由式(12)~(15)可得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{d\xi} &= 0, \quad \frac{dw}{d\xi} = 0 \\ \frac{da}{d\xi} &= 4\beta r^3 \exp(-2q) \sin(2\phi) \\ \frac{d\delta}{d\xi} &= 4\beta r^3 \exp(-2q) \cos(2\phi) \\ \frac{dq}{d\xi} &= -\delta, \quad \frac{d\phi}{d\xi} = (2\beta - 1)ar \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

从式(16)可以得出, r 和 w 在相互作用期间保持常数.

3 光折变空间屏蔽孤子相互作用的微扰变分解

联立式(16)得到微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 q}{d\xi^2} &= -4\beta r^3 \exp(-2q) \cos(2\phi) \\ \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} &= 4\beta (2\beta - 1) r^4 \exp(-2q) \sin(2\phi) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(17)表明, 两孤子的相对间距 q 与它们的相对相位差有关.

当 $(2\beta - 1)r = 1$ 时, 令 $Y = q(\xi) + i\phi(\xi)$, 则式(17)可合并为

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} = -4\beta r^3 \exp(-2Y) \quad (18)$$

解式(18)得到

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{4\beta r^3 \cos[(\xi + C)\rho]^2}{\rho^2} \right\} \quad (19)$$

式中 $\rho^2 = 4\beta r^3 \exp(-2Y_0) - (Y_\xi)_0^2$, 初值 $Y_0 = q_0 + i\phi_0$, $(Y_\xi)_0 = (q_\xi)_0 + i(\phi_\xi)_0$. 积分常数 $C = \arctan(\sqrt{4\beta r^3 \exp(-2Y_0)/\rho^2 - 1})/\rho$, 若考虑两孤子对称入射, 则 $C = 0$, 其中 $\rho^2 = 4\beta r^3 \exp(-2Y_0)$, 因此

$$q(\xi) = \text{Re}(Y) = q_0 + \ln |\cos(\xi\phi_0)| = q_0 + \frac{1}{2} \ln[\cos^2(2\xi\sqrt{\beta r^3} e^{-q_0} \cos\phi_0) + \cosh^2(2\xi\sqrt{\beta r^3} e^{-q_0} \sin\phi_0) - 1] \quad (20)$$

图 1 给出式(20)表示的两对称入射孤子相对间距与传播距离的关系. 两孤子初始相对间距 $2q_0 = 4$, 相位差 $2\phi_0$ 分别为 $0, \pi/4, \pi/2, \pi$. 从图中看出, 两孤子的相对间距 q 与它们的相对相位差有关, 两孤子是吸引还是排斥取决于初始相位差 ϕ_0 .

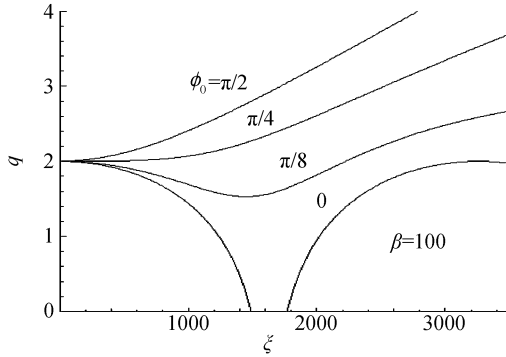


图 1 $(2\beta - 1)r = 1$ 时, 相对间距与传播距离的关系
Fig. 1 Relative distance q versus propagation distance ξ when $(2\beta - 1)r = 1$

当初始相位为 $\phi_0 = 0$ 时, 即相位差 $2\phi_0 = 0$, 对应两孤子同相输入的情况, 此时 $q(\xi) = q_0 + \ln |\cos(2\xi\sqrt{\beta r^3} e^{-q_0})|$, 由于 $|\cos(2\xi\sqrt{\beta r^3} e^{-q_0})|$ 是周期函数, 所以两孤子周期性分开和碰撞. 对于任何的 ξ 值, 均有 $q(\xi) \leq q_0$, 表示两孤子相互吸引. 当

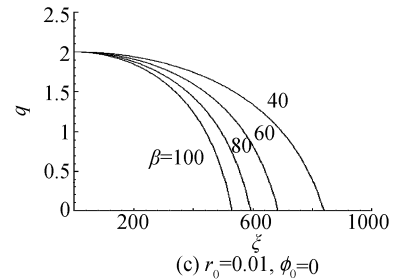
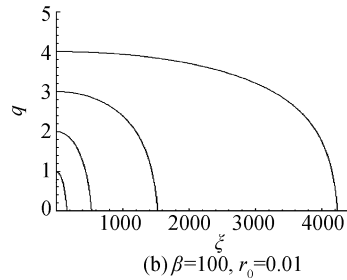
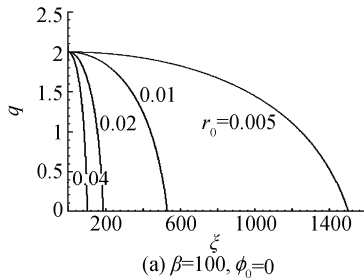


图 3 $(2\beta - 1)r \neq 1$ 时, 两同相输入孤子的相对间距与传播距离的关系
Fig. 3 Relative distance of two in-phase solitons versus propagation distance ξ when $(2\beta - 1)r \neq 1$

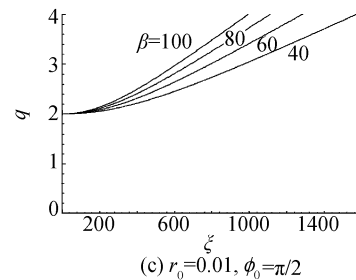
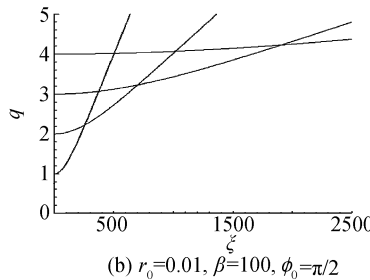
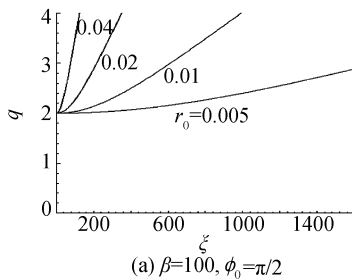


图 4 $(2\beta - 1)r \neq 1$ 时, 两反相输入孤子的相对间距与传播距离的关系
Fig. 4 Relative distance of two out-phase solitons versus propagation distance ξ when $(2\beta - 1)r \neq 1$

传播距离的关系. 由图可知, 若初始相位 ϕ_0 低于某定值时, 则 q 周期性地变为零, 孤子发生碰撞; 若初始相位 ϕ_0 大于某定值时 $q > q_0$, 且随传播距离单调

$\xi = e^{q_0} \arccos(e^{-q_0}) / \sqrt{4\beta r^3}$ 时, 两孤子在这一距离上发生第一次碰撞, 其碰撞周期为 $\pi e^{q_0} / (2\sqrt{\beta r^3})$.

当初始相位为 $\phi_0 = \pi/2$ 时, 相位差为 $2\phi_0 = \pi$, 对应两孤子反相输入的情况, 此时 $q(\xi) = q_0 + \ln |\cosh(2\xi\sqrt{\beta r^3} e^{-q_0})| \geq q_0$, 两孤子间距单调增加, 表示两孤子相互排斥, 与实验观察的现象一致.

对于一般情形, 即 $(2\beta - 1)r \neq 1$, 得到微分方程组(17)的解析解比较困难, 可以借租数学工具软件 Maple 给出方程组的数值解, 如图 2、图 3 和图 4, 图中的单位均为任意单位(当 $\phi_0 = 0$ 时, 由于受到数值算法的局限, 发生第一次碰撞以后的曲线无法画出).

图 2 给出了具有不同相位的两孤子相对间距与

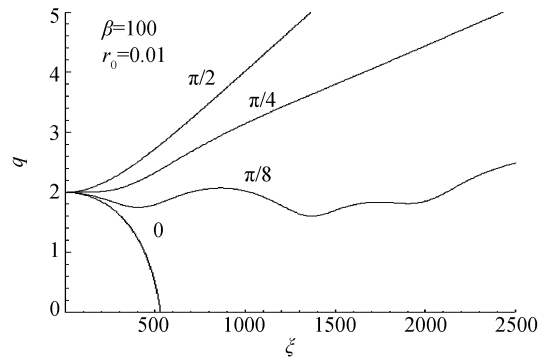


图 2 $(2\beta - 1)r \neq 1$ 时, 不同相位差的两孤子的相对间距与传播距离的关系
Fig. 2 Relative distance q versus propagation distance ξ when $(2\beta - 1)r \neq 1$

增加, 表现出相互排斥.

图 3 给出了在 $(2\beta - 1)r \neq 1$ 时, 两同相输入孤子在不同条件下相对间距与传播距离的关系. 由图

可知,孤子的相对光强、相对间距和晶体外加电场都对同相孤子的相互作用有影响.相对光强越大、相对间距越小,外加电场越强两孤子越容易发生碰撞.这是因为在这些条件下,两孤子尾部交叠区域非线性效应较强,引起折射率增大,导致两孤子相互吸引发生碰撞.

图4给出了在 $(2\beta-1)r \neq 1$ 时,两反相输入孤子在不同条件下相对间距与传播距离的关系.由图可知孤子的相对光强、相对间距和晶体外加电场都对反相孤子的相互作用有影响.相对光强越大、相对间距越小,外加电场越强则两孤子间排斥力越大.这是因为在这些条件下,两孤子尾部交叠区域非线性效应较弱,引起折射率减小,导致两孤子相互排斥而彼此分开.

由图3和图4看出,外加电场对孤子的相互作用影响较小,而孤子的相对光强和相对间距对孤子的相互作用影响较大,从而为光控光提供了理论根据.从图中还可以看出增大孤子的相对间距可以有效地避免孤子发生相互作用,这对孤子并行传输避免相互作用有一定的指导意义.

4 结论

本文利用微扰变分法求解了光折变非线性波方程,分析了两相干屏蔽孤子的相互作用,并对相互作用的物理机制进行了解释.研究表明,当两孤子尾部交叠时就会发生相互作用,相互作用力的大小与孤子的相对强度、相对间距以及晶体外加电场的大小有关,孤子的相对强度越大、相对间距越小以及晶体外加电场越强相互作用力越大;相互作用力的性质与初始相位差有关,同相相互吸引,反相相互排斥.这些特性为光控光提供了理论依据.

参考文献

- [1] CROSIGNANI B, SEGEV M, ENGIN D, *et al.* Self-trapping of optical beams in photorefractive media[J]. *JOSA B*, 1993, **10**(3): 446-453.
- [2] SEGEV M, VALLEY G C, CROSIGNANI B, *et al.* Steady-state spatial screening solitons in photorefractive materials with external applied field[J]. *Phys Rev Lett*, 1994, **73**(24): 3211-3214.
- [3] CHRISTODOULIDES D N, CARVALHO M I. Bright, dark, and gray spatial soliton states in photorefractive media[J]. *JOSA B*, 1995, **12**(9): 1628-1633.
- [4] SEGEV M, SHIH M, VALLEY G C. Photorefractive screening solitons of high and low intensity[J]. *JOSA B*, 1996, **13**(4): 706-718.
- [5] GARCÍA-QUIRINO G S, ITURBE-CASTILLO M D, VYSOUKH V A, *et al.* Observation of interaction forces between one-dimensional spatial solitons in photorefractive crystals[J]. *Opt Lett*, 1997, **22**(3): 154-156.
- [6] KRÓLIKOWSKI W, HOLMSTROM S A. Fusion and birth of spatial solitons upon collision[J]. *Opt Lett*, 1997, **22**(6): 369-371.
- [7] MENG H, SALAMO G, SHIH M, *et al.* Coherent collisions of photorefractive solitons[J]. *Opt Lett*, 1997, **22**(7): 488-490.
- [8] KRÓLIKOWSKI W, DENZ C, STEPKEN A, *et al.* Interaction of spatial photorefractive solitons[J]. *Quan Semi Opt*, 1998, **10**: 823-837.
- [9] ANDERSON D, LISAK M. Bandwidth limits due to incoherent soliton interaction in optical-fiber communication systems[J]. *Phys Rev A*, 1985, **32**(4): 2270-2274.
- [10] CHEN Lu-jun, LIANG Chang-hong, WU Hong-shi. A perturbative variational analysis on interaction of two solitary waves in trough resonator[J]. *Acta Phys Sin*, 1992, **41**(11): 1745-1752.
陈陆君, 梁昌洪, 吴鸿适. 水槽中孤波相互作用的微扰变分分析[J]. *物理学报*, 1992, **41**(11): 1745-1752.
- [11] CHRISTODOULIDES D N, CARVALHO M I. Bright, dark, and gray spatial soliton states in photorefractive media[J]. *JOSA B*, 1995, **12**(9): 1628-1633.

Study on Interaction of Photorefractive Spatial Solitons Using Perturbative Variational Approach

CHEN Shou-man^{1,2}, SHI Shun-xiang¹, DONG Hong-zhou¹

(1 *School of Technological Physics, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

(2 *Optoelectronic Technology Laboratory, Ankang University, Ankang, Shaanxi 725000, China*)

Received date: 2006-07-03

Abstract: The coherent interaction of photorefractive spatial screening solitons is investigated using perturbative variational approach. The position and period of first collision of in-phase solitons in the photorefractive crystal are obtained. The physics mechanism of the interaction of in-phase or out-phase solitons is analyzed. The results show that the interaction will occur when the tail of solitons is overlapped. The magnitude of interaction force is relative to the intensity and relative distance of the solitons, and the electric field biased in the photorefractive crystal. The distance between two solitons will decrease with the increase of the intensity of solitons which will become much more powerful with the increase of the biased electric field. The quality of the force is relative to the initial phase difference. Interaction of the in-phase solitons appears to attract each other, and interaction of the π out of phase solitons appears to repel each other.

Key words: Photorefractive spatial screening solitons; Interaction; Perturbative variational approach



CHEN Shou-man was born in 1968. He received the Master's degree from Xidian University in 2002. Now he is studying for his Ph. D. degree in the Xidian University. He is an associate professor of Ankang College. His research interests focus on the theory and experiment of photorefractive nonlinear optics.