

圆孔限制下有相位变化的高斯光束远场 发散度的理论分析*

刘宏展, 黄旭光

(华南师范大学 光子信息技术实验室, 广州 510006)

摘 要:依据夫琅和费衍射理论,通过引入高斯变换,即把夫琅和费衍射积分中的贝赛尔函数用一高斯函数来近似,详细分析并推导出圆孔限制下具有相位变化的高斯光束远场发散度的近似计算公式.与传统数值积分求光束发散度相比,它避免了繁琐数值积分,其误差不超过 3%.

关键词:高斯光束;夫琅和费衍射;发散度

中图分类号:O431.1;TN929.11

文献标识码:A

文章编号:1004-4213(2007)11-2138-4

0 引言

在星间半导体激光通信系统中,传输的是高斯光束,当它通过望远镜往外发射时,其传输距离远至 4 万多公里,这决定了高斯光束波面的质量必须达到光学衍射极限,此时光束的发散度将小至微弧级.研究中遇到一个问题:如何根据实验测量得的高斯光束的波差,方便快捷地求取光束远场的发散度.问题的实质是根据光场的近场分布,求取远场的夫琅和费衍射.传统求衍射的方法有两种,一种是直接数值积分法^[1-6],一种是基于慢收敛无穷级数解析解的方法^[7-10].然而,这些文献中都未就光束远场发散度的规律及实质作深入细致的研究.文献[11]研究了,在弱衍射效应下,高斯光束远场的近似,它只适合于通光口径与高斯光束束腰比值大于 1.6 的情况;文献[12]研究了基于光束模式放大方法的远场发散度近似解析解,与文献[11]相比,其结果稍好些,但仍然只适用于弱衍射的情况,而且其表达式很复杂、不实用.不同于已有的方法,本文通过改变夫琅和费衍射积分中的积分核,即用一新的高斯函数来代替积分核中的贝赛尔函数,而产生一个简单的闭合解.从远场的中心一直到其幅值 1/e 的区域,此远场衍射的闭合解与实际衍射积分的数值解,大小基本一致,据此,求得了圆孔限制下的高斯光束远场发散度的近似计算公式.只要知道高斯光束的束腰、波差以及圆孔口径的大小,即可方便快捷地求得高斯光束的远场发散度,它避免了繁琐的数值积分,与精确的数值衍射积分相比,其最大误差仅为 3%,在工程应用中有一定的实际价值.

1 技术背景

假设高斯光束的空间振幅分布为 $a(r_0) =$

$L \exp\left(-\frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right)$, 它的附加波差为 $\text{err}(r_0) = \exp\left(-i2\pi \frac{\Delta\omega}{\lambda}\right)$, 其中, $\frac{\Delta\omega}{\lambda} = \frac{\Delta\omega_m}{\lambda} \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)$, 它们的含义如图 1. 图中, r 表示高斯光束的曲率半径, R 表示口径的半径, $\Delta\omega_m$ 表示口径处的最大波差, $\Delta\omega$ 表示距口径中心距离为 r_0 处的波差.

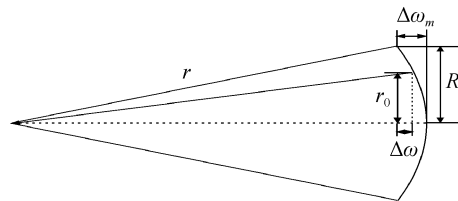


图 1 最大波差、通光口径及口径内波面任意点的波差关系
Fig. 1 Illustration of the relation between maximal wavefront-error, aperture and the wavefront-error of any point in the aperture

另外,假设可变通光光阑的孔径函数为 $p(r_0) = \text{circ}\left(\frac{r_0}{R}\right)$, 则由衍射理论可知,圆孔限制下有波差的高斯光束在夫琅和费衍射区内的光场分布为

$$A(r_1, z) = \int_0^\infty a(r_0) p(r_0) \text{err}(r_0) \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \cdot \exp\left(ik \frac{r_1^2}{2z}\right) J_0[2\pi r_0 r_1 / (\lambda z)] r_0 dr_0 = C' \cdot \int_0^R \exp\left(-\frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) \exp\left(i2\pi \frac{\Delta\omega_m r_0^2}{\lambda R^2}\right) J_0[2\pi r_0 r_1 / (\lambda z)] r_0 dr_0 \quad (1)$$

式中 $C' = 2\pi L \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \cdot \exp\left(ik \frac{r_1^2}{2z}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{\Delta\omega_m}{\lambda}\right)$, J_0 表示零阶贝塞尔函数.

如果远场幅值 1/e 点对应的半径为 r_e , 即 $|A(r_e, z)| = |A(0, z)|/e$. 则远场的发散度可以用全角可表示为

$$\theta \approx 2 \tan \theta = 2r_e / z \quad (2)$$

在两种极限状况下,发散度是容易求取的. 第一种是 R 远大于高斯光束的束腰,此时高斯光束无

*国家 973 重点基础研究发展计划(2007CB307000, 2007CB307001)、“纳/微结构中观光学效应及其基本物理问题研究”(2007CB307001)、广东省自然科学基金(04010398)和国家教育部留学人员科研启动基金资助
Tel: 020-39737697 Email: lhzhzhan@yahoo.com.cn
收稿日期: 2006-07-24

衍射地自由通过孔径,其发散为^[13]

$$\theta = 2 \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \tag{3}$$

第二种是 R 远小于高斯光束的束腰,此时高斯光近似为平面波. 一般都是取远场分布的第一个零点来衡量发散度,即 $\theta = 1.22\lambda/R$. 在这里,统一用 $1/e$ 点来衡量远场发散度的大小,以便比较,则它可以表示为^[14]

$$\theta = \frac{2.583}{\pi R} 8\lambda \tag{4}$$

2 圆孔受限高斯光束发散度近似公式的推导

高斯变换在文献[14]中已经有详细的说明,为

为了避免重复,这里将直接运用它的结果. 令

$$P(r_0) = \exp\left(-\frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) J_0\left(\frac{2\pi r_1 r_0}{\lambda z}\right) \tag{5}$$

则对于某一圆通光口径,在 $r_1 \leq r_e$ 条件下,式(5)中的零阶贝塞尔函数可以用一个高斯函数近似. 下边将运用文献[14]的高斯近似,针对式(1)的实际情况,给出具体推导,最终求得所需要的发散度公式.

在式(1)中,作如下高斯变换

$$\exp\left(-\frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) J_0[2\pi r_0 r_1 / (\lambda z)] \approx \exp\left(-\frac{r_0^2}{K_1^2 \omega_0^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r_0^2}{\omega_0'^2(r_1)}\right) = \exp\left(-\frac{r_0^2}{\omega_0'^2(r_1)}\right) \tag{6}$$

式中 $1/\omega_0'^2(r_1) = 1/(K_1 \omega_0)^2 + 1/\omega_0''^2(r_1)$, $\omega_0''(r_1) = K_2 \lambda z / 2\pi r_1$, K_1, K_2 是需确定的常量. 令

$$|\text{int}(r_1)| = \frac{1}{2} \left| \int_0^{R^2} \exp(ax) \cos(bx) dx + i \int_0^{R^2} \exp(ax) \sin(bx) dx \right| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[(1 - \exp(aR^2))^2 + 4 \exp(aR^2) \cdot \sin^2(b/2R^2) \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_0'^4(r_1)} + \left(\frac{2n\pi}{R^2}\right)^2}} \sqrt{\left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{\omega_0'^2(r_1)}\right)\right]^2 + 4 \exp\left(-\frac{R^2}{\omega_0'^2(r_1)}\right) \sin^2(n\pi)} \tag{7}$$

式中 $-\frac{1}{\omega_0'^2(r_1)} = a, n = \frac{\Delta\omega_m}{\lambda}, b = 2\pi \frac{\Delta\omega_m}{\lambda R^2} = 2\pi n / R^2$

则

$$C = |\text{int}(r_e)| = \frac{|\text{int}(0)|}{e} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_0'^4(r_e)} + \left(\frac{2n\pi}{R^2}\right)^2}} \sqrt{\left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{\omega_0'^2(r_e)}\right)\right]^2 + 4 \exp\left(-\frac{R^2}{\omega_0'^2(r_e)}\right) \sin^2(n\pi)} \tag{8}$$

当式(8)中指数项可以忽略、 $2n\pi/R^2$ 很小的情况下,有以下关系式存在

$$\left(\frac{1}{K_1 \omega_0}\right)^2 + \left[\frac{2\pi r_e}{K_2 \lambda z}\right]^2 = \frac{1}{2C} \tag{9}$$

则远场发散度为

$$\theta = 2 \frac{r_e}{z} = \frac{K_2 \lambda}{\pi} \left[\frac{1}{2C} - \left[\frac{1}{K_1 \omega_0} \right]^2 \right]^{1/2} \tag{10}$$

把 C 的表达式代入到式(10)

$$\theta = \frac{K_2}{K_1} \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \left[\frac{e \sqrt{1 + (2n\pi K_1^2 \omega_0^2 / R^2)^2}}{\sqrt{\left[1 - \exp\left(-R^2 / (K_1 \omega_0)^2\right)\right]^2 + 4 \exp\left[-R^2 / (K_1 \omega_0)^2\right] \sin^2(n\pi)}} - 1 \right]^{1/2} \tag{11}$$

当 $R/\omega_0 \gg 1, R/\omega_0 \ll 1, n \leq 0.3$ 时,成立以下等式

$$\theta(R/\omega_0 \gg 1) = \frac{K_2}{K_1} \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \sqrt{e-1} \tag{12}$$

$$\theta(R/\omega_0 \ll 1) = K_2 \frac{\lambda}{\pi R} \sqrt{e} \tag{13}$$

把式(12)、(13)分别同式(3)、(4)比较,可以得到

$$K_2 = 2.5838/\sqrt{e} \approx 1.5671, K_1 = K_2 \sqrt{e-1}/2 \approx 1.0271, K_2/K_1 = 2/\sqrt{e-1}. \text{ 得到}$$

$$\theta = \frac{0.4856\lambda}{\omega_0} \left[\frac{e \sqrt{1 + [2n\pi(1.0271\omega_0)^2 / R^2]^2}}{\sqrt{\left[1 - \exp\left(-R^2 / (1.0271\omega_0)^2\right)\right]^2 + 4 \exp\left[-R^2 / (1.0271\omega_0)^2\right] \sin^2(n\pi)}} - 1 \right]^{1/2} \tag{14}$$

式中, R 是通光口径, ω_0 是高斯光束的束腰, $n = \Delta\omega/\lambda$ 是波差系数. 在 $R/\omega_0 \geq 1, n \leq 0.3$ 时,上式是适用

的. 当 $n=0$ 时,式(14)变为

$$\theta = \frac{0.4856\lambda}{\omega_0} \left\{ \frac{e}{1 - \exp \left[- \left(\frac{R}{1.0271\omega_0} \right)^2 \right] - 1} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

它对应于没有波差的高斯光束的远场发散度,与文献[14]中的结论是一致的.

3 发散度近似公式与衍射数值积分的比较

为了检验远场发散度式(14)的准确性,有必要把它与根据式(1)求得的分发度进行比较.分两大类情况来验证,首先固定高斯光束的波差,取 $\Delta\omega = 0.2\lambda$, $\lambda = 0.800 \mu\text{m}$,取不同通光口径,求远场发散度随高斯光束束腰变化曲线,它们如图2,图3.

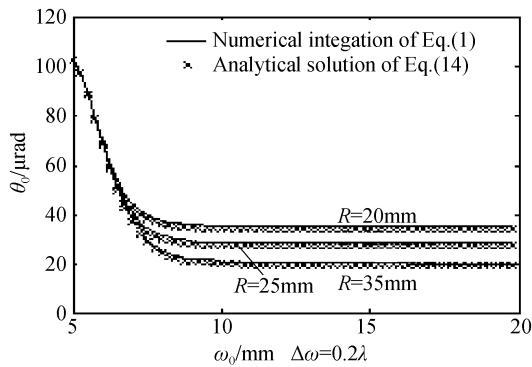


图2 在三个不同口径情况下光束远场发散度随束腰的函数关系

Fig.2 Divergence angle as a function of the beam width for three different values of aperture radius

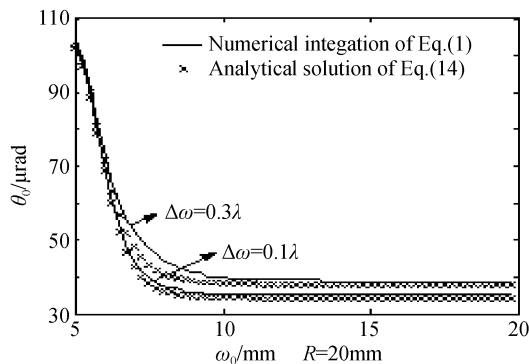


图3 两种不同波差下光束远场发散度随光束束腰的函数关系

Fig.3 Divergence angle as a function of the beam width for two different values of wavefront-error

图2中,通光口径 R 分别取20 mm,25 mm和35 mm.从图中可以看到,根据式(14)求得的光束远场发散度,与由式(1)求得的分发度十分相符.当固定通光口径,让光束的波差变化,其结果如图3.

图3对应口径为 $R=20 \text{ mm}$,波差分别为 $\Delta\omega = 0.1\lambda, 0.3\lambda$ 时,光束发散度随束腰的变化关系,它们吻合的依然很好.图2、图3说明,式(16)和根据实际数值积分求得的值很吻合.通过对两图形中各曲线对应点的值进行比较,发现最大的误差也不超过

3%,所以说在满足 $R/\omega_0 \geq 1, n \leq 0.3$ 时,用式(14)来估算过圆孔受限的有波差的高斯光束远场发散度是合适的.

4 结论

本文由夫琅和费衍射出发,在满足($r_0 \leq R, r_1 \leq r_c$)的条件下,用一个新高斯函数来近似贝赛尔函数,详细推导出圆孔受限的有小波差的高斯光束远场发散度计算公式,它与根据衍射积分求得的分发度十分吻合,其误差不大于3%.运用它可以方便求得有小波差高斯光束的分发度,避免了繁琐衍射积分,同时又保证了准确度,在工程计算中有一定的应用价值.不足之处,它只适合 $R/\omega_0 \geq 1, n \leq 0.3$ 的情况,当光束波差变大,或者光束束腰大于通光口径时,它必须被修正,所以有一定的局限性.

参考文献

- [1] ZHOU Guo-quan, ZHAO Dao-mu, WANG Shao-min. Propagation characteristics of planar wave diffracted by small circular aperture[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(7): 874-876.
周国泉,赵道木,王绍民.平面波经微小圆孔衍射的传输特性[J]. *光子学报*, 2002, **31**(7): 874-876.
- [2] JIANG Xiao-qing, LIN Qiang. Phase characteristics of diffraction wave from a circular aperture[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(5): 440-442.
江晓清,林强.圆孔“衍射波”的相位特性[J]. *光子学报*, 2000, **29**(5): 440-442.
- [3] WANG Peng, XU Yu-guang, YU Qin-yue. Physical meaning of analytic expression for fresnel diffraction[J]. *Acta Photonica Sinica*, 1999, **28**(1): 72-74.
王鹏,徐毓光,余勤跃.菲涅耳衍射解析表达式的物理意义[J]. *光子学报*, 1999, **28**(1): 72-74.
- [4] KAUFFMAN J F. The calculated radiation patterns of a truncated Gaussian aperture distribution [J]. *IEEE Trans Antennas Propag*, 1965, **13**(3): 473-474.
- [5] BUCK A L. The radiation pattern of a truncated Gaussian aperture distribution[C]. *Proc IEEE*, 1967, **55**(3): 448-450.
- [6] CAMPBELL J P, DESHAZER L G. Near fields of truncated Gaussian aperture[J]. *J O S A*, 1969, **59**(11): 1427-1429.
- [7] OLAOFE G O. Diffraction by Gaussian apertures[J]. *J O S A*, 1970, **60**(12): 1654-1657.
- [8] SCHELL R G, TYRAS G. Irradiance from an aperture with a truncated Gaussian field distribution[J]. *J O S A*, 1971, **61**(1): 31-35.
- [9] LENZ G. Far-field diffraction of truncated higher-order Laguerre-Gaussian beams[J]. *Opt Commun*, 1996, **123**(4-6): 423-429.
- [10] DING D, LIU X. Approximate description for Bessel, Bessel-Gauss, and Gaussian beams with finite aperture[J]. *J O S A*, 1999, **A16**(6): 1286-1293.
- [11] BELLAND P, CRENN J P. Changes in the characteristics of a Gaussian beam weakly diffracted by a circular aperture[J].

- Appl Opt*, 1982, **21**(3):522-527.
- [12] TANAKA K, SAGA N, Mizokami H. Field spread of a diffracted Gaussian beam through a circular aperture [J]. *Appl Opt*, 1985, **24**(8):1102-1106.
- [13] ZHANG Ji-xiong. Photoelectron tutorial [M]. Guangzhou: South China University of Technology, 2001:66-69.
- 张季熊. 光电子学教程[M]. 广州:华南理工大学出版社, 2001:66-69.
- [14] DRÈGE M, SKINNER N G, BYRNE D M. Analytical far-field divergence angle of a truncated Gaussian beam[J]. *Appl Opt*, 2000, **39**(27):4918-4925.

Analysis of Far-field Divergence of a Gaussian Beam with Phase Variation Under Circular Aperture Diffraction

LIU Hong-zhan, HUANG Xu-guang

(Laboratory of Photonic Information Technology, The South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

Received date: 2006-07-24

Abstract: Based on the Fraunhofer diffraction, the formula of the Gaussian beam's divergence is deduced and analyzed in detail by using the Gaussian transform, such as using the Gaussian function instead of the Bessel function in the Fraunhofer diffraction formula. Compared with the direct numerical integration of the Fraunhofer diffraction, this formula avoids the troublesome integral, but the error is no more than 3%.

Key words: Gaussian beam; Fraunhofer diffraction; Divergence angle



LIU Hong-zhan was born in 1975. He received the Ph. D. degree in optics engineering from Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences. Now he is a lecturer in South of China Normal University. His research interests are optical communication, optical information processing and optical measurement.