

封闭方腔自然对流的格子-Boltzmann 方法动态模拟

童长青, 何雅玲, 王勇, 刘迎文

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 以压力分布函数和内能密度分布函数为基本演化变量, 构建了一个新的不可压缩的双分布函数热格子-Boltzmann模型. 对封闭方腔内自然对流进行数值分析的结果表明, 该模型可以克服原模型的可压缩效应, 并在一定程度上提高了计算结果的数值精度. 以此模型动态模拟封闭方腔自然对流的形成和演化过程的结果表明: Ra 越大, 流场的演化越复杂, 稳定状态下方腔内涡的数量越多, 高低温壁面附近的换热越强烈, 压强逐渐呈现出中心低, 上、下壁面附近高的对称分布.

关键词: 格子-Boltzmann; 自然对流; 动态模拟

中图分类号: TK124 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)01-0032-05

Simulation of Transient Natural Convection in Square Cavity with Incompressible Thermal Lattice-Boltzmann Method

Tong Changqing, He Yaling, Wang Yong, Liu Yingwen

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: An incompressible double distribution thermal lattice-Boltzmann model, considering the pressure distribution and energy density distribution as the elementary evolution variables, is presented to solve the weak compressibility at low Mach number of the previous model. The numerical results of the natural convection in an enclosure square cavity in this model agree well with the commonly accepted numerical solutions. And the real-time development of the flow and heat transfer is reported and discussed. The results show that as Rayleigh number increases, the flow field gets more complicated, and the heat transfer near the walls at high and low temperature becomes more intensively. The pressure symmetrically distributes with a valley at the center of the cavity and peaks near the horizontal walls.

Keywords: lattice-Boltzmann method; natural convection; real-time simulation

格子-Boltzmann方法(LBM)^[1-2]是近十几年来得以迅速发展和逐步健全的一种新型数值方法. 求解换热相关问题的LBM方法称为热格子-Boltzmann方法(TLBM), 文献[3]提出的双分布函数模型是稳定性好、适用范围较广的一种. 该模型在密度分布函数的基础上引入内能密度分布函数, 从而使流动与换热可以分开计算, 即: 通过密度分布函数的

演化获得流场情况, 通过内能密度分布函数的时间演化得到温度分布情况. 这种方法不但改善了TLBM方法的稳定性, 而且从根本上解决了黏性耗散问题.

为了克服模型所具有的可压缩效应, 文献[3]提出了一种用压力和平均密度计算密度平衡态分布函数的方法, 并以此改善的密度分布函数与内能密度

分布函数参与粒子演化. 本文参照文献[4]的不可压缩 LBM 模型, 重新构建了以压力分布函数和内能密度分布函数为基本变量的双分布函数 TLBM 模型. 该模型具有精度高、物理概念清晰、易于实现等特点, 可以应用于各类不可压缩热流耦合问题的数值计算.

对封闭方腔自然对流的理论和数值分析^[5-8]大都基于 Boussinesq 近似. 文献[8]从边界层理论和量纲分析的角度, 分析了当充满等温流体的封闭方腔一侧被升温另一侧被降温时, 封闭方腔内自然对流非稳态变化过程. 本文从 LBM 方法可以实时地跟踪并记录粒子运动情况的特点出发, 利用本文所介绍的不可压缩双分布函数 TLBM 方法, 动态模拟了这个非稳态过程, 并从涡运动和演化的角度对此进行分析.

1 物理模型

图 1 所示为封闭方腔自然对流的物理模型. 封闭方腔高为 H , 上、下壁面绝热(以下均是量纲一的量), 腔内充满 $\bar{\rho} = 3$, $Pr = 0.71$, 温度 $\bar{T} = \frac{(T_h + T_c)}{2}$ 的均质均温气体. 在初始瞬间, 方腔左壁被加热至 T_h (为 20), 右壁被冷却至 T_c (为 1), 并保持恒定. Ra 是衡量自然对流强弱的重要量纲一的量, 其定义为 $Ra = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu \alpha}$. 其中: β 为体积膨胀系数; g 为重力加速度; ν 为运动黏性系数; α 为热扩散率. 随着 Ra 的增大, 自然对流作用增强.

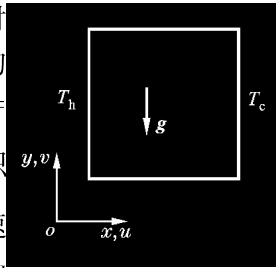


图 1 封闭方腔物理模型

2 不可压双分布函数 TLBM 方法

文献[3]介绍的 TLBM 模型具有源于其采用的运动模型的可压缩效应. 然而, 关于自然对流的理论和数值研究大都基于 Boussinesq 近似, 该近似认为流体是不可压缩的. 因此, 为了在 TLBM 中引入 Boussinesq 近似, 以模拟自然对流, 就需要克服该模型的可压缩效应.

文献[4]介绍的以压力分布函数为基本演化变量的 LBM 模型, 从理论上彻底克服了可压缩效应, 但作者没有讨论过与热模型的耦合问题. 本文将压力分布函数的概念引入双分布函数 TLBM 模型中,

构建了以压力分布函数和内能密度分布函数为基本演化变量的 TLBM 模型, 从理论上彻底克服了原模型的可压缩效应, 提高了数值计算的精度.

为了保持模型的黏性系数和 N-S 方程的黏性系数的一致性, 并保持方法的显性, 首先引入以下新的分布函数

$$\tilde{p}_i = p_i + \frac{0.5dt}{\tau_f}(p_i - p_i^{eq}) - \frac{dt}{2}F_i \quad (1)$$

$$\tilde{g}_i = g_i + \frac{0.5dt}{\tau_g}(g_i - g_i^{eq}) + \frac{dt}{2}Z_i \frac{p_i}{c_s^2} \quad (2)$$

式中: c_s 为声速; $Z_i = (\mathbf{c} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i dt, t + dt) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]/dt$, 表示黏性热耗散, \mathbf{c} 为粒子的速度, \mathbf{u} 为流体的宏观速度; $F_i = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{c}_i - \mathbf{u}) p_i^{eq}/(RTc_s^2)$, 表示体积力 \mathbf{G} 的作用, 对自然对流而言 $\mathbf{G} = \beta g(T - \bar{T})\mathbf{j}$; g_i^{eq} 为内能密度平衡态分布函数, 其具体表达形式与文献[3]相同; p_i^{eq} 为压力平衡态分布函数, 根据常用的 D2Q9 模型^[1], 可按下式进行计算

$$p_i^{eq} \equiv \omega_i \left\{ p + p_0 \left[3 \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{u^2}{c^2} \right] \right\} \quad (3)$$

其中 $\omega_0 = 4/9, \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1/9, \omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = 1/36$.

TLBM 的粒子演化方程为

$$\tilde{p}_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i dt, t + dt) - \tilde{p}(\mathbf{x}, t) = -\frac{dt}{\tau_f + 0.5dt}(\tilde{p}_i - p_i^{eq}) + \frac{dt\tau_f F_i}{\tau_f + 0.5dt} \quad (4)$$

$$\tilde{g}_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i dt, t + dt) - \tilde{g}(\mathbf{x}, t) = -\frac{dt}{\tau_g + 0.5dt}(\tilde{g}_i - g_i^{eq}) - \frac{dt}{\tau_g + 0.5dt}Z_i \frac{p_i}{c_s^2} \quad (5)$$

式中: τ_f, τ_g 分别为运动和热方程的松弛时间.

流体的宏观参量(包括压力、速度、温度及热流等)可按下列各式计算

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= \sum_i \tilde{p}_i \\ p_0 u &= \sum_i \tilde{p}_i c_{ix} + \frac{dt}{2} p G, p_0 v = \sum_i \tilde{p}_i c_{iy} \\ \rho e &= \sum_i \tilde{g}_i - \frac{dt}{2} \sum_i \frac{p_i Z_i}{c_s^2} \\ \mathbf{q} &= \left(\sum_i \mathbf{c}_i \tilde{g}_i - \rho e \mathbf{u} - \frac{dt}{2} \sum_i \frac{\mathbf{c}_i \tilde{p}_i Z_i}{c_s^2} \right) \frac{\tau_g}{\tau_g + 0.5dt} \end{aligned} \quad (6)$$

式中: e 为粒子的能量.

3 模型考核

文献[5-8]分别使用不同的数值方法模拟了封闭方腔自然对流问题,其中文献[6]的数值结果被引用最多.为考查模型的可靠性,本文分别计算了 Ra 为 10^3 、 10^4 、 10^5 、 10^6 情况下壁面的平均努塞尔数 ($\overline{Nu} = \frac{1}{H} \int_0^H -\frac{H}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\text{wall}} dy$),结果如表1所示.

表1 平均努塞尔数与经典解的比较

Ra	文献[5]	文献[6]	文献[7]	本文结果	相对误差 /%
10^3	1.117	1.118	1.114	1.116	0.178
10^4	2.235	2.243	2.245	2.243	0.000
10^5	4.504	4.519	4.510	4.510	0.199
10^6	8.767	8.800	8.806	8.805	0.056

注:表中相对误差表示本文结果相对文献[8]的误差.

从表中可以发现,采用本文所介绍的不可压缩双分布函数 TLBM 模型进行计算,得到了精确度较高的数值结果.

4 方腔内自然对流的动态模拟

封闭方腔自然对流是热流耦合的经典问题,已有很多学者[5-8]对此进行了实验和数值研究,但动态模拟其形成和演化过程的研究很少见文献报道.本文采用构建的不可压双分布函数 TLBM 模型动态模拟封闭方腔自然对流,并从涡运动和演化的角度对其形成和演化进行了分析.

图2所示为 $Ra=10^3$ 时流场的演化情况,图中 t 表示粒子演化步数,相当于非稳态问题的时间.如图2a所示,在初始时刻,左侧壁温 T_h 高于附近流体温度 \bar{T} ,壁面附近的流体在浮升力的作用下从下向上运动.同时,右壁附近流体由上而下流动.由图3a可见,竖壁自然对流[9]的形成使流体在左上方和右下方积蓄而形成高压中心,于是在水平方向产生了由压差导致的强制流动.同时,如图2b所示,竖壁边界层的内侧流体由于粒子与壁面的碰撞产生涡量而回流形成旋涡.由于相同的原因,方腔右侧也形成了一个相同方向的旋涡.我们把这2个涡称为原始涡.由图2c可见,随着时间的步进,压差逐渐增大,同时旋涡强度亦逐渐增强.在某时刻,左、右2个涡相遇,由于两者方向相同,2个涡合并,形成一个合成涡.刚合并时,由于2个原始涡的涡核相距较远,故而合

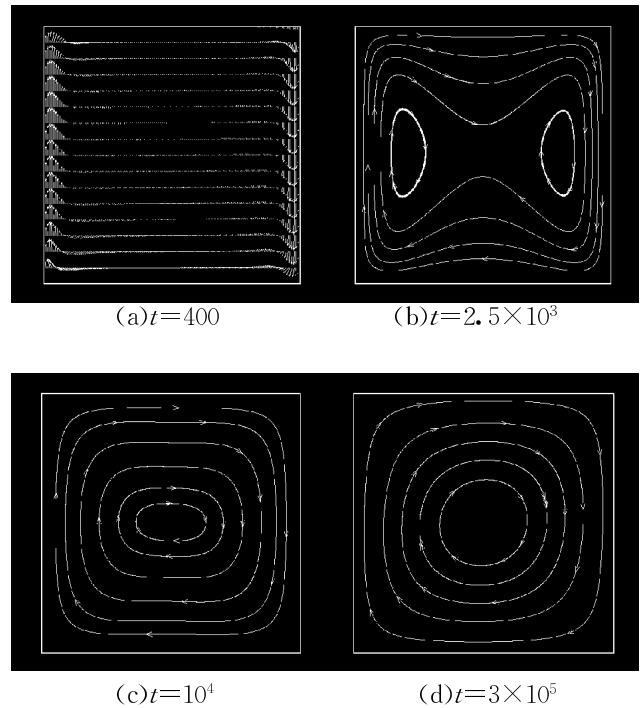


图2 $Ra=10^3$ 时方腔自然对流的动态演化过程

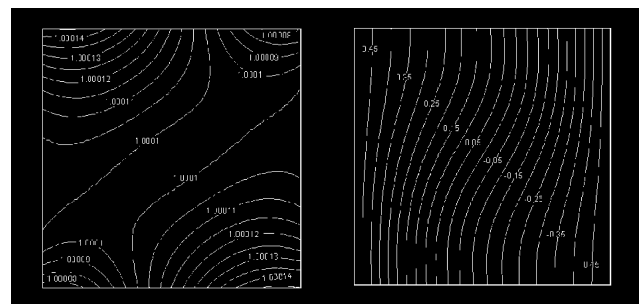


图3 $Ra=10^3$ 时稳定状态下方腔内的等压线和等温线分布

成涡呈椭圆形.随着流场的均匀化,原始涡核消失,合成涡逐渐变成近似圆形.图2d所示即为充分发展以后的流场情况.

从以上分析中可以看出,封闭方腔内自然对流是温差、压差和方腔有限空间限制3项因素综合作用的结果.在 Ra 较小时,2个原始涡经过一定时间的演化后,最终合成为一个近似圆形的合成涡.

当 Ra 增大到 10^5 以后,方腔内的流动和换热情况开始表现得非常复杂.如图4a所示,由于浮升力的大幅度增大,竖壁边界层的作用也大幅度增强,因而涡的卷起作用更为强烈,在方腔中产生的旋涡偏离方腔中心.图4b示出了2个涡合并后流场的分布情况.从图中可以看出,旋涡在合并以后被拉长,最后又分离出2个偏向高压中心的涡旋,并最终达到稳定状态.如图5a所示,由于 Ra 的增大,方腔各处

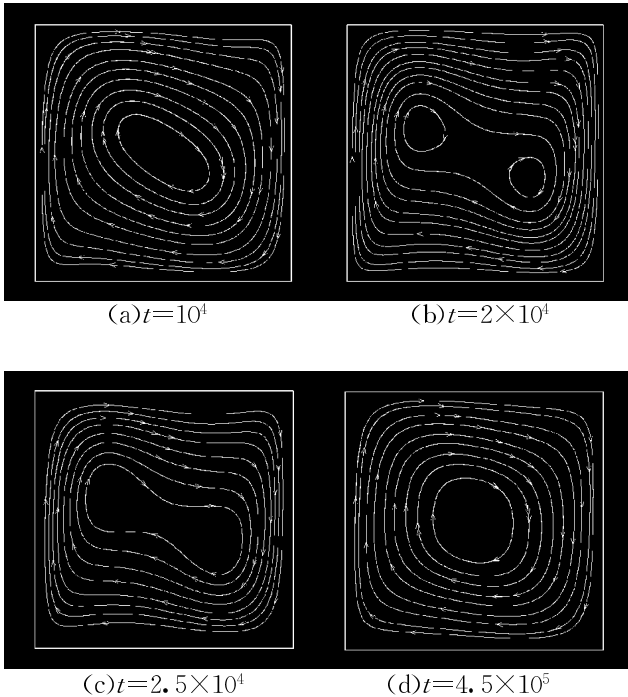


图 4 $Ra=10^5$ 时方腔自然对流的动态演化过程

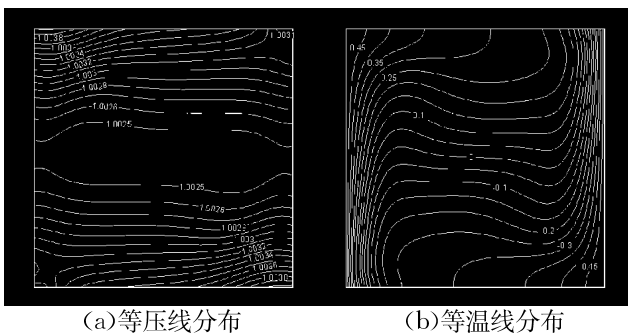


图 5 $Ra=10^5$ 时稳定状态下方腔内的等压线和等温线分布

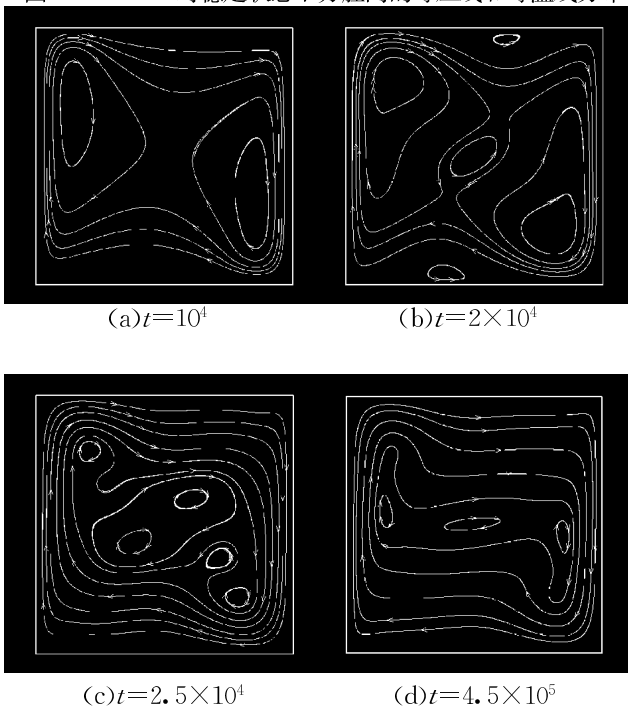


图 6 $Ra=10^6$ 时方腔自然对流的动态演化过程

的压力值有较大幅度增大,且等压线逐渐变为近似水平直线.

当 $Ra=10^6$ 时流动演化表现得更为复杂,参见图 6. 偏向高压中心的原始涡互相作用,且由于 2 个涡核之间的距离较远而且涡量较大,因而并没有合并,而是在 2 个涡核之间产生一个新的旋涡,其方向与两原始涡相反. 同时,如图 6b 所示,由于这 2 个涡偏离方腔中心,并且流体速度增加,因而在 2 个低压中心产生 2 个与原始涡方向相反的小涡. 随着时间的演化,首先 2 个小涡由于壁面作用和流动增强而消亡,同时由于 2 个原始涡之间相互作用的增强,方腔中心的反向涡消亡,2 个原始涡开始合并. 从图 6b 中可以看出,由于原始涡的涡核依然保持在初始位置,于是在流场中出现 7 个旋涡:2 个强度已减小的原始涡;由方腔中心的旋涡分离出的 2 个新涡;中心涡与原始涡之间相互作用而产生的 2 个反向涡;在整个方腔内运动的涡. 流场表现得极为复杂,参见图 6c. 图 6d 为稳定状态下流场的分布情况:由于各涡之间相互作用,反向涡消亡,中心涡强度减小并在水平方向被拉长,原始涡核向中线方向迁移,流动进入稳定状态.

比较图 3、图 5、图 7 的等温线分布可见, Ra 越大,左右壁面附近等温线分布越为密集. 这说明 Ra 的增大导致了竖壁附近的自然对流作用增强,因而壁面附近的换热增强. 方腔的内部等温线分布则逐渐变为大致垂直方向的分布. 这说明方腔内部热流由低 Ra 时的倾斜向右,变为垂直向下. 从各图中的等压线的分布可以看出,随着 Ra 的增大,等压线逐渐变为水平线,且压力呈现中间低,上、下底面高的对称分布.

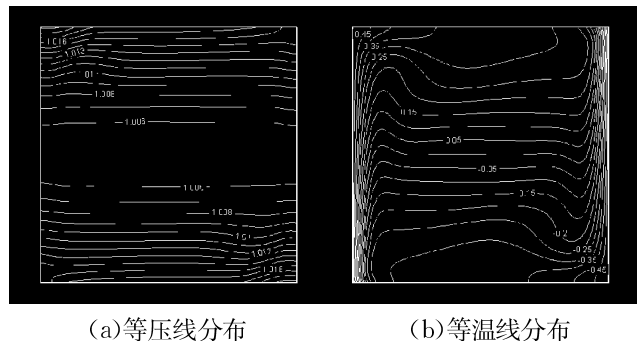


图 7 $Ra=10^6$ 时稳定状态下方腔内的等压线和等温线分布

5 结 论

本文将压力分布函数的概念应用到 TLBM 方

法中,并以压力分布函数与内能密度分布函数为基本演化变量,构建了一个新的不可压的双分布函数 TLBM 模型.另一方面,由于 LBM 具有动态模拟计算区域内的流场和温度场演化的特点,因而本文以此新的 TLBM 模型,动态模拟了封闭方腔自然对流的形成和演化过程,数值模拟结果表明:

(1)该不可压缩双分布函数 TLBM 模型提高了数值计算结果的精确度.

(2) Ra 越大,自然对流作用越强,流场的演化越复杂.经过复杂的涡的形成、合并、消亡等涡的运动过程之后,方腔内稳定状态下涡的数量由 Ra 为 10^3 时的 1 个,增加到 Ra 为 10^6 情况下的 4 个.

(3) Ra 越大,竖壁附近的自然对流作用越强,壁面附近的换热越强.

(4)随着 Ra 的增大,等压线逐渐呈现出方腔中心低压,上、下壁面高压的轴对称分布.

参考文献:

- [1] Chen Shiyi, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows [J]. *Ann Rev Fluid Mech*, 1998, 30 (1): 329-364.
- [2] Wang Yong, He Yaling, Tang Guihua, et al. Simulation of two dimensional oscillating flow using the lattice Boltzmann method [J]. *Int J Mod Phys C*, 2006, 17(5): 615-630.
- [3] He Xiaoyi, Chen Shiyi, Doolen G D. A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 146(1): 282-300.
- [4] He Xiaoyi, Luo Lishi. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier - Stokes equation [J]. *J Stat Phys*, 1997, 88(3/4): 927-944.
- [5] D’Orazio A, Corcione M, Celata G P. Application to natural convection enclosed flows of a lattice Boltzmann BGK model coupled with a general purpose thermal boundary condition [J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2004, 43(6): 575-586.
- [6] de Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution [J]. *Int J Numer Methods Fluids*, 1983,3(3): 249-264.
- [7] Barakos G, Mitsoulis E, Assimacopoulos D. Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions [J]. *J Numer Methods Fluids*, 1994, 8(7): 695-719.
- [8] Patterson J, Imberger J. Unsteady natural convection in a rectangular cavity [J]. *J Fluid Mech*, 1980, 10 (1): 65-88.
- [9] Incropera F P, DeWitt D P. *Fundamentals of heat and mass transfer*[M]. 2nd ed. New York, USA: John Wiley & Sons, 1985: 417-426.

(编辑 王焕雪)