

算子分裂法求解旋转坐标系下不可压黏性流动

刘海湖¹, 苏剑², 高丽敏³, 李开泰², 王尚锦¹

(1. 西安交通大学流体机械及压缩机国家工程研究中心, 710049, 西安; 2. 西安交通大学理学院, 710049, 西安; 3. 西北工业大学动力与能源学院, 710072, 西安)

摘要: 提出了求解旋转坐标系下的不可压黏性流动问题的 θ 格式算子分裂算法. 通过算子分裂, 把不可压缩性、非线性和哥氏力占优三大耦合困难分割开来. 采用亚网格尺度稳定化方法消除了 Galerkin 方法求解时由于不可压缩性和哥氏力占优所引发的数值振荡. 结合最小二乘和共轭梯度法间接求解非线性子问题, 排除了强对流作用所引发的数值振荡, 避免了引入迎风格式离散对流项的必要性. 同时该算法保证了迭代过程中有限元总刚度矩阵正定不变的特性, 为求解线性方程组采用高效的求解器提供了可能. 数值试验表明, 该算法具有稳定性好、收敛速度快、计算精度高的特点.

关键词: 哥氏力; 算子分裂; 稳定化方法; 亚网格尺度; 共轭梯度法

中图分类号: TP391.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)07-0833-05

Operator Splitting Methods for Solution of Incompressible Viscous Flows in a Rotating Frame

Liu Haihu¹, Su Jian², Gao Limin³, Li Kaitai², Wang Shangjin¹

(1. The National Engineering Research Center of Fluid Machinery and Compressor, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 3. School of Power and Energy Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: An operator splitting method was developed to solve the incompressible Navier-Stokes equations defined in a rotating frame of reference. Based on the operator splitting, this method provides an efficient way to decouple the three main difficulties of the problem, the incompressibility, the nonlinearity and the numerical oscillations due to the presence of the dominated Coriolis forces. The sub-grid scale stabilized method was used to eliminate the oscillations caused by incompressibility and dominated Coriolis forces when Galerkin method was employed. Least-squares conjugate gradient algorithms were applied to solve for the nonlinear instability, which avoids the necessity of introducing the upwind scheme to discrete the convective term. Compared with other numerical methods, the present method ensures the resulting coefficient matrices to be positive definite and invariable, which can be efficiently stored and solved. Several numerical examples indicate that the method displays improved stability, fast convergence and high accuracy.

Keywords: Coriolis force; operator splitting; stabilized method; sub-grid scale; conjugate gradient algorithm

为提高核潜艇螺旋桨、水轮机、水泵等叶轮机械的效率, 设计高性能的叶轮转子、研究旋转坐标系下的不可压黏性流动十分必要. 在高速旋转坐标系下, 流动控制方程中哥氏力项占有相当的份额, 采用传

统的有限元方法进行离散通常会引发数值振荡, 再加上流动方程特有的不可压缩性与非线性, 使得旋转坐标系下的不可压黏性流动问题的求解相当复杂. 采用有限元方法求解旋转坐标系下不可压黏性

流动,围绕解决三大数值困难(哥氏力、不可压缩性与非线性),发展了一系列的数值算法^[1-3].但是,这些方法在迭代过程中需要反复更新总刚度矩阵,耗费了大量的计算时间,并且对迭代的初值要求较高.

本文引入 θ 格式算子分裂算法的思想,对旋转坐标系下的不可压黏性流动控制方程进行离散,在每个时间步将 N-S 方程转变成求解两个广义 Stokes 问题和一个非线性问题.为兼顾算法的稳定性和计算精度,将哥氏力项合理融入两类子问题当中.引入 SGS(Sub-Grid Scale)稳定化思想,添加稳定性项处理广义 Stokes 问题排除了不可压缩性和哥氏力占优两类困难,将非线性问题转化成最小二乘问题,然后采用共轭梯度法进行求解,间接获得非线性问题的解.一系列流动算例表明了本文方法的有效性和高精度.

1 控制方程及数值离散

旋转坐标系下不可压黏性流动的控制方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{on } \Gamma_0; \quad \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - n\mathbf{p} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_1 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: p, ν 为压力和运动黏性系数; $\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{f}$ 分别表示速度、角速度和体积力矢量. Γ_0, Γ_1 分别表示 Dirichlet 和 Neumann 边界,且 $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

采用传统 Galerkin 有限元方法求解方程(1)存在三大数值困难^[3]:不可压约束使得速度和压力插值函数的选取须满足相容性(BB)条件;当对流项相对于黏性项占优时,强烈的非线性作用会引发数值振荡,且对算法和求解器的健壮性有很高的要求;哥氏力项相对于黏性项占优会导致局部振荡,且不可压条件迫使这种局部振荡演化为全局振荡^[1].针对上述数值困难,本文提出旋转坐标系下求解不可压黏性流动的 θ 格式算子分裂算法,可以表述如下

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} - \omega \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} + \gamma(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+\theta}) + \nabla p^{n+\theta} = \\ \mathbf{f} - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \beta \nu \Delta \mathbf{u}^n - \mu(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^n) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\theta} = 0 \\ \mathbf{u}^{n+\theta} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{on } \Gamma_0 \\ \omega \frac{\partial \mathbf{u}^{n+\theta}}{\partial n} - n\mathbf{p}^{n+\theta} = \bar{\mathbf{t}} - \beta \nu \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1-\theta} - \mathbf{u}^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - \beta \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta} + \mu(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+1-\theta}) + \\ (\mathbf{u}^{n+1-\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1-\theta} = \\ \mathbf{f} + \omega \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} - \gamma(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+\theta}) - \nabla p^{n+\theta} \\ \mathbf{u}^{n+1-\theta} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{on } \Gamma_0 \\ \beta \nu \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1-\theta}}{\partial n} = \bar{\mathbf{t}} + n\mathbf{p}^{n+\theta} - \omega \frac{\partial \mathbf{u}^{n+\theta}}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} - \omega \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \gamma(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+1}) + \\ \nabla p^{n+1} = \mathbf{f} - (\mathbf{u}^{n+1-\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1-\theta} + \\ \beta \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta} - \mu(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{n+1-\theta}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{u}^{n+1} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{on } \Gamma_0 \\ \omega \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial n} - n\mathbf{p}^{n+1} = \bar{\mathbf{t}} - \beta \nu \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1-\theta}}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

数值试验表明,当 $\gamma=2-2^{1/2}$ 时,式(2)~式(4)算法具有很好的稳定性和收敛性,式中的其他参数详见文献[4].于是,将求解方程(1)的三大数值困难分割开来,每个时间步中式(2)和式(4)所对应的子步所需求解的广义 Stokes 子问题仅包括不可压缩性和哥氏力占优两类数值困难,完全可以采用 SGS 方法解决.式(3)所对应的子步的非线性困难可以采用最小二乘结合共轭梯度算法解决.为求解式(2)~式(4),考虑以下函数空间

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{on } \Gamma_0\} \\ V_0 &= \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_0\} \\ Q &= \{q(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0 \quad \text{if } \Gamma = \Gamma_0\} \end{aligned}$$

2 SGS 方法求解广义 Stokes 子问题

广义 Stokes 子问题可以写成如下紧凑形式

$$\left. \begin{aligned} a\mathbf{u} - b\Delta \mathbf{u} + e(\mathbf{I} \times \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{on } \Gamma_0 \\ b \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - n\mathbf{p} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: \mathbf{I} 为单位角速度矢量.为表述方便,引入下述线性算子 \mathbf{L} 及其伴随算子 \mathbf{L}^*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{u}, p) &= \begin{bmatrix} a\mathbf{u} - b\Delta \mathbf{u} + e(\mathbf{I} \times \mathbf{u}) + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix} \\ \mathbf{L}^*(\mathbf{v}, q) &= \begin{bmatrix} a\mathbf{v} - b\Delta \mathbf{v} - e(\mathbf{I} \times \mathbf{v}) - \nabla q \\ -\nabla \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

于是,方程(5)转变成求解下述方程

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

文献[1]及本文数值试验表明, e 相对于 b 较大时, 采用 Galerkin 方法求解式(7)会引发数值振荡, 为治愈该振荡, 采用 SGS 方法^[3] 稳定化的思想, 在 Galerkin 离散的基础上添加下述亚网格修正项

$$T_{stab} = - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \mathbf{L}^*(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau}[\mathbf{L}(\mathbf{u}, p) - \mathbf{F}] d\Omega \quad (8)$$

上述 SGS 稳定化求解方法, 具体可描述如下.

对于 $\forall (\mathbf{v}, q) \in V_0 \times Q$, 求 $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$, 使之满足

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_{u1} d\Omega + \int_{\Omega} b \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\zeta}_{u1} \cdot (\mathbf{r}_{u1} + \mathbf{r}_{u2}) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\zeta}_{u2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} (\mathbf{v} + \boldsymbol{\zeta}_{u1}) \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Omega \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} q (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\zeta}_p \cdot (\mathbf{r}_{u1} + \mathbf{r}_{u2}) d\Omega = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\zeta}_p \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{u1} &= e(\mathbf{I} \times \mathbf{u}) + \mathbf{a}\mathbf{u}; \mathbf{r}_{u2} = -b\Delta \mathbf{u} + \nabla p \\ \boldsymbol{\zeta}_{u1} &= \tau_u [e(\mathbf{I} \times \mathbf{v}) - \mathbf{a}\mathbf{v} + b\Delta \mathbf{v}] \\ \boldsymbol{\zeta}_{u2} &= \tau_p \nabla \cdot \mathbf{v}; \boldsymbol{\zeta}_p = \tau_u \nabla q \end{aligned} \quad (11)$$

根据文献[5]的分析, 参数 τ_u, τ_p 可取值为

$$\tau_u = \left(\frac{4b}{h^2} + a + e \right)^{-1}; \tau_p = 4b + (a + e)h^2 \quad (12)$$

对于双线性单元, h 为单元尺寸. 求解式(9)、式(10)可获得广义 Stokes 问题的解. 由于 SGS 方法的应用, 引入了新的稳定性项, 排除了传统有限元方法所引发的数值振荡, 使得速度、压力采用等阶插值成为可能. 另外, 稳定性项的引入大大改善了有限元代数方程组系数矩阵的性态, 为采用许多高效的求解器提供了可能.

3 共轭梯度法求解非线性子问题

非线性子问题可以表示成如下形式

$$\begin{cases} \mathbf{c}\mathbf{u} - d\Delta \mathbf{u} + g(\mathbf{I} \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{on } \Gamma_0; d \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_1 \end{cases} \quad (13)$$

引入泛函

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (c |\mathbf{y}(\mathbf{u})|^2 + d |\nabla \mathbf{y}(\mathbf{u})|^2) dx \quad (14)$$

其中 \mathbf{y} 为下列变分问题的解:

对 $\forall \mathbf{v} \in V_0$, 求解 $\mathbf{y} \in V_0$, 使之满足

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{c}\mathbf{y} \cdot \mathbf{v} + d \nabla \mathbf{y} : \nabla \mathbf{v}) d\Omega = \\ & \int_{\Omega} (\mathbf{a}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + d \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} g(\mathbf{I} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega + \\ & \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

通过适当的变分、微分运算, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} J'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega &= \int_{\Omega} (\mathbf{c}\mathbf{y} \cdot \mathbf{v} + d \nabla \mathbf{y} : \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \\ & \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} d\Omega + \\ & \int_{\Omega} g(\mathbf{I} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{y} d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

与文献[4]相比, 公式(16)中多了一个哥氏力产生项. 借助式(15), 可以采用共轭梯度算法^[6] 求解泛函(14)的极小化问题, 从而间接获得方程(13)的解. 由于在运算过程中只需要反复求解椭圆型对称算子 $(c\mathbf{I} - d\Delta)$, 保证了对刚度矩阵的节约存储和采用直接求解器的可能性. 另外, 广义 Stokes 子问题的求解为非线性子问题提供的迭代初值也保证了算法的健壮性和稳定性.

4 数值模拟试验

该部分包括 3 个数值试验. 为叙述方便, 记 \mathbf{u}, p 为精确解, \mathbf{u}_h, p_h 为计算所得近似解, 且误差

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \left(\sum_i \| \mathbf{u}_h^{r+1} - \mathbf{u}_h^r \|^2 / \sum_i \| \mathbf{u}_h^{r+1} \|^2 \right)^{1/2} \\ \epsilon_u &= \left(\sum_i \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|^2 / \sum_i \| \mathbf{u} \|^2 \right)^{1/2} \\ \epsilon_p &= \left(\sum_i \| p - p_h \|^2 / \sum_i \| p \|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

4.1 求解旋转坐标系下的广义 Stokes 问题

计算区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, 选取合适的 \mathbf{f} 使 $p = 0, \mathbf{u}(x, y) = (f(x)g'(y), -f'(x)g(y))$ 其中

$f(x) = x^2(1-x)^2 e^{7x}, g(y) = y^2(1-y)^2, \nu = 10^{-3}, \boldsymbol{\omega} = 500\mathbf{k}$ (\mathbf{k} 为垂直于计算平面的单位矢量). 计算中不包括对流项, 旨在说明当哥氏力占优时, 求解 Stokes 子问题采用 SGS 方法引入稳定性项的必要性.

应用 Q1Q1、Q2Q1 两种不同类型的单元, 分别采用传统 Galerkin 方法和 SGS 方法对 $10 \times 10, 20 \times 20, 40 \times 40$ 这 3 套不同的均匀网格进行了计算.

从图1可以看出,对于传统 Galerkin 方法, Q1Q1 单元会引发数值振荡($\epsilon_u = 1.693$),而且即使是满足 BB 条件的 Q2Q1 单元在哥氏力占优的流动中也会引起数值振荡($\epsilon_u = 0.205$),而应用了 SGS 方法后,两类单元的数值振荡都能治愈, ϵ_u 分别为 0.086 和 0.024. 这种数值振荡在 Ekman 数^[7]越小时变得越发突出,与真解的偏差也越大. 从图2可看出:对于 Q2Q1 和 Q1Q1 两类单元, Q2Q1 单元的计算精度基本等效于其一半网格尺寸下的计算精度. 但是,当两类单元的计算精度相当的时候,两者应用到的节点数是完全相同的,而 Q1Q1 单元生成的总刚度矩阵带宽会小很多,这种优势在三维情况下表现得更为突出. 为此,以下均采用 Q1Q1 单元进行计算.

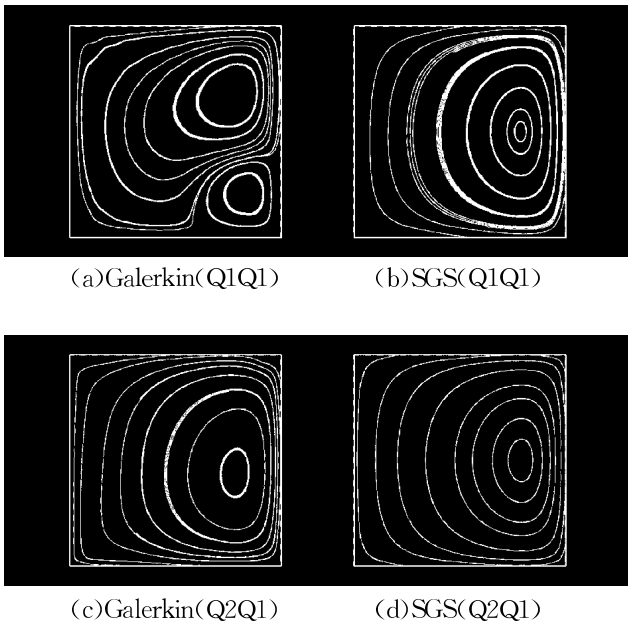


图1 不同单元和方法计算得到的流线图(20×20)

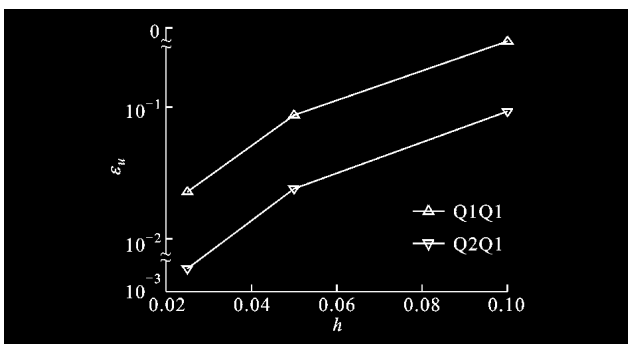


图2 采用 SGS 方法获得的 ϵ_u-h 关系图线

4.2 求解在纯 Dirichlet 边界条件下, 旋转坐标系下的 Navier-Stokes 方程

计算区域 $\Omega=[0,1] \times [0,1]$, 选取合适的 f 使 $p=x(1-x)$, $u(x,y)=(f(x)g'(y), -f'(x) \cdot g(y))$. 其中 $f(x)=x^2(1-x)^2$, $g(y)=f(y)$, $\nu=$

10^{-5} , $\omega=500k$.

计算采用 3 套不同的均匀网格, 网格数分别为 10×10 、 20×20 、 40×40 . 计算的时间步长 $\Delta t=0.02$, 流场初值均赋为 0, 计算的收敛性判据为 $\epsilon \leq 10^{-7}$. 从图3可以看出: 单元尺寸越大, 对应的收敛曲线越陡, 收敛速度越快; 对于每一条收敛曲线, 开始的迭代步收敛速度很快, 然后收敛速度几乎保持为一个定值; 在时间推进过程中, 误差 ϵ 永远保持下降趋势, 不会存在偏离定常解的波动^[4]. 从图4不难发现, 无论是速度还是压力误差, 都与 h^2 成正比关系, 从一个侧面表明了本文算法具有一致性收敛的特点, 并且随着网格加密, 计算结果逐步逼近真解. 图5计算的结果和收敛图线表明, 在纯 Dirichlet 边界条件下, 本文算法求解旋转坐标系下的不可压黏性流动是可行的, 排除了传统 Galerkin 方法所引发的数值振荡.

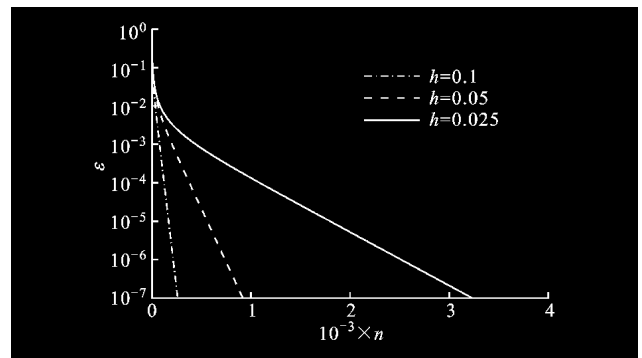


图3 迭代时间步 n 与误差 ϵ 间的关系

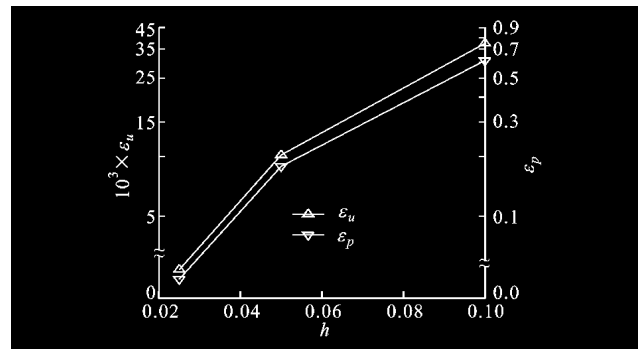


图4 h 与 ϵ_u 和 ϵ_p 间的对应关系

4.3 求解旋转坐标系下的 Poiseuille 流动问题

计算区域 $\Omega=[-2,2] \times [-1,1]$, 求解的方程为式(1), 其中各参数的取值如下

$$\nu = 10^{-4}, \omega = 500k$$

$$f_1 = 2\nu + 2 - 2x, f_2 = \omega(1 - y^2)$$

边界条件给定为

$$\text{在 } x=-2, -1 \leq y \leq 1 \text{ 处, } u=1-y^2, v=0$$

$$\text{在 } y=\pm 1, -2 \leq x \leq 2 \text{ 处, } u=0, v=0$$

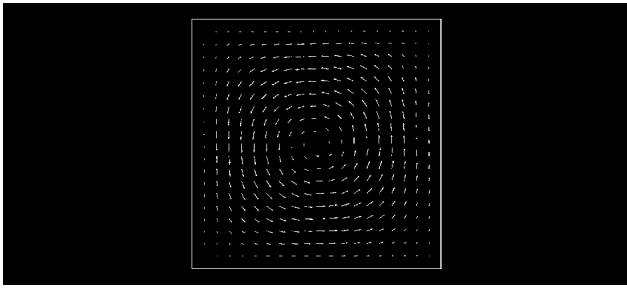


图5 纯 Dirichlet 边界条件下的速度矢量图

在 $x=2, -1 \leq y \leq 1$ 处, $v \frac{\partial u}{\partial n} - np = 0$

该问题的解析解为

$$u = 1 - y^2, v = 0, p = x(2 - x)$$

计算采用 4 套不同的均匀网格, 网格数分别为 $10 \times 10, 20 \times 20, 40 \times 40, 60 \times 60$, 所有计算中时间步长 $\Delta t = 0.01$. 除入口给定边界流速外, 流场其余位置流速均初始化为 0. 图 6 为在不同的网格数下, 速度在 L_2 空间的离散误差图线. 图 7 给出了 20×20 网格下计算的速度矢量图. 结果表明, 采用本文发展算法模拟旋转坐标系下的混合边界问题是完全合理的, 且计算的 Re 大, 获得的流场结果精度高.

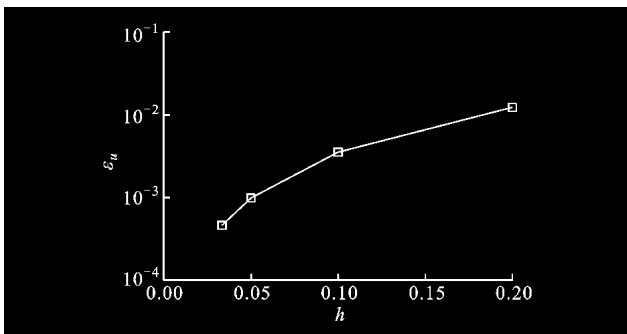
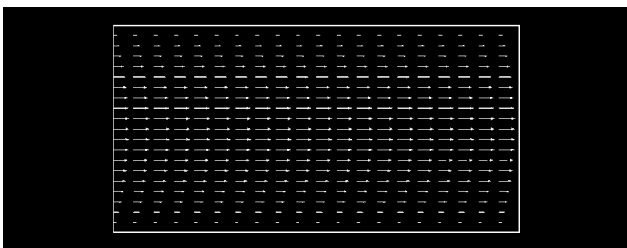
图6 单元尺度 h 与速度误差 ϵ_u 之间关系

图7 混合边界条件下的速度矢量图

5 结论

(1) 提出了求解旋转坐标系下的不可压黏性流动的 θ 格式算子分裂算法, 把不可压缩性、非线性和

哥氏力占优三大耦合困难分割开来.

(2) 给定分裂参数 $\gamma = 2^{1/2} - 1$, 既能够保证算法稳定, 又能够保证合理的计算精度.

(3) 采用 SGS 方法求解哥氏力占优的广义 Stokes 问题可有效地消除传统 Galerkin 方法所引发的数值振荡.

(4) 把非线性子问题转变为最小二乘问题, 然后采用共轭梯度法求解, 消除了强烈对流作用所引发的数值振荡, 避免了引入迎风格式的必要性.

(5) 本文算法选用的有限元插值函数无需满足 BB 条件, 且在时间推进的过程中, 所有的有限元总刚度矩阵正定且保持不变, 为求解线性方程组采用高效的求解器提供了可能.

参考文献:

- [1] Codina R, Soto O. Finite element solution of the Stokes problem with dominating Coriolis force[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 142: 215-234.
- [2] Codina R. Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations with Coriolis forces based on the discretization of the total time derivative[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 148: 467-496.
- [3] Codina R. A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190: 2681-2706.
- [4] 刘海湖, 李开泰, 苏剑, 等. 采用算子分裂法求解不可压黏性流动[J]. 西安交通大学学报, 2006, 40(12): 1270-1272.
Liu Haihu, Li Kaitai, Su Jian, et al. Operator splitting methods for solution of incompressible viscous flows[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2006, 40(12): 1270-1272.
- [5] Codina R. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 156: 185-210.
- [6] Glowinski R. Finite element methods for incompressible viscous flow[M]. Amsterdam, Netherlands: North-Holland, 2003.
- [7] Haroon S K, Scriven L E. Viscous flow through a rotating square channel[J]. Physics of Fluids, 1985, 28(10): 2968-2979.

(编辑 王焕雪)