第41卷 第3期 西 安 交 通 大 学 学 报 Vol.41 №3
2007年3月 JOURNAL OF XI′AN JIAOTONG UNIVERSITY Mar. 2007

一种预测流动和传热问题的快速算法

丁鹏，陶文铨
（西安交通大学能源与动力工程学院，710049，西安）

摘要：将湍流拟序结构分析中的最佳正交分解技术运用到流动和传热问题中，并在最佳正交分解技术的基础上提出了一种快速预测流动和传热问题的算法.通过对样本矩阵实施最佳正交分解得到一组特征函数.这些特征函数具有能量最优的特性，即以这些特征函数为基函数，可以用非常少的基函数将原物理问题准确地表示出来.特征系数用样条曲线插值的方式计算得到.以同心圆环内的自然对流为例验证此算法，参数 R_o/R_i 为2.6，Pr 为0.71，$5\,000 \leqslant Ra \leqslant 1\times10^5$.利用该算法可以准确地预测温度场和速度场，与准确解之间的相对误差仅为0.7%，并且比SIMPLE算法快100倍.该算法有较广的使用范围，不受几何结构和流态的限制，只要有一组准确的样本便可使用.

关键词：最佳正交分解；快速算法；流动；传热
中图分类号：TK124 **文献标识码**：A **文章编号**：0253-987X(2007)03-0271-03

Fast Algorithm for Prediction of Fluid Flow and Heat Transfer

Ding Peng，Tao Wenquan
(School of Energy and Power Engineering，Xi′an Jiaotong University，Xi′an 710049，China)

Abstract：A fast and efficient algorithm based on the proper orthogonal decomposition (POD) technique for predicting heat transfer and fluid flow was proposed. The POD technique was applied to a set of numerical simulation results to obtain the eigenfunctions that represent the dynamics of the physical problem. The function space considered in the physical problem was limited to the smallest linear subspace when employing these eigenfunctions as basis functions. In stead of projecting the governing equations onto these eigenfunctions，the spectral coefficients were obtained with a simple cubic spline interpolation procedure. The presented algorithm was verified with an example of natural convection in a two dimensional concentric cylinder with a radius ratio of 2.6，and the Rayleigh number varying from 5 000 to 1×10^5. The results show that this algorithm can predict the flow and temperature fields with a relative error of 0.7% compared with the exact numerical results，moreover，it is more than 100 times faster than the SIMPLE algorithm.

Keywords：proper orthogonal decomposition；fast algorithm；fluid flow；heat transfer

工程中的许多流动和传热问题都可以用偏微分方程来描述，通常以数值方法来获得问题的解.对于工业生产中的许多复杂问题，要想得到这些问题的数值解需要很大的计算资源，运用常规数值方法去优化工业生产在目前的计算条件下是不可能完成的.本文将分析湍流拟序结构中的最佳正交分解(proper orthogonal decomposition，POD)[1-2]技术运用到流动和传热问题中，并以同心圆环中的自然对流问题为例，表明了最佳正交分解技术可以在很短时间内准确地预测流动和传热问题.

1 POD的理论基础

假设 $f(\boldsymbol{x},t_n)$ 为一已知物理场，$f(\boldsymbol{x},t_n)$ 可以通过数值方法得到并称之为一个样本.POD的最终目

收稿日期：2006-07-14. 作者简介：丁鹏(1980～)，男，博士生；陶文铨(联系人)，男，教授，博士生导师，中国科学院院士. 基金项目：国家自然科学基金资助项目(50476046).

的是得到一组最佳正交基(POM),从而将 $f(\boldsymbol{x},t_n)$ 表示为以下的级数形式

$$f(\boldsymbol{x},t_n)=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k(t_n)\phi^k(\boldsymbol{x})\quad M\leqslant\infty,\ n=1,\cdots,N \tag{1}$$

式中:M 代表截断自由度,即基函数的个数.

求解 POM 的过程等同于求解以下积分特征值问题[1-2]

$$\int_{\Omega}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\boldsymbol{x},t_n)f(\boldsymbol{x}',t_n)\phi(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'=\lambda\phi(\boldsymbol{x}') \tag{2}$$

在实际计算中,由于 Hermit 核 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\boldsymbol{x},t_n)f(\boldsymbol{x}',t_n)$ 的维数与数值求解的离散网格数相同,所以运用文献[2]的方法直接求解式(2)在一般计算资源下很难完成.本文采用了文献[3]的方法来求解,其方法的优势在于它将 Hermit 核的维数转变为与样本的个数相等,从而大大节省了计算资源.式(1)中的系数$\alpha_k(t_n)$可以通过将样本投影到最佳正交基上,即

$$\alpha_k(t_n)=(f(\boldsymbol{x},t_n),\phi^k(\boldsymbol{x})) \tag{3}$$

于是,用于构建 POM 的任何一个样本都可以通过式(1)重构得出.现定义 2 个参数:$\xi_n=\lambda_n\Big/\sum_{n=1}^{N}\lambda_n$ 和 $\eta_M=\sum_{n=1}^{M}\lambda_n\Big/\sum_{n=1}^{N}\lambda_n$,$M\leqslant N$.由最佳正交分解的性质[1-2]可知,$\xi_n$ 代表第 n 个最佳正交基在式(1)中的所占据的“能量”,η_M 则代表前 M 个最佳正交基在式(1)中占有的“能量”.注意式(3)仅能获得在设计参数下的 $\alpha_k(t_n)$值,而对于不在设计参数下的 $\alpha_k(t_n)$值,作者是通过样条曲线插值的方式得出的.本文通过算例证明,利用在设计参数下获得的最佳正交基函数,可以快速准确地计算出设计参数范围内,以及设计参数上下限附近的所有物理场.

2 结果与分析

作者采用的算例为同心圆环中的自然对流问题,计算参数为 $R_{\mathrm{o}}/R_{\mathrm{i}}=2.6$,$Pr=0.7$,$Ra$ 的范围为 5 000～100 000.控制方程及其边界由 SIMPLE[4]算法求解,计算网格数为 150×50.

2.1 样本的构建

样本的构建是 POD 分析过程中最重要的一步,样本如何构建直接关系到计算结果的准确程度.本文将 20 个 Ra 下的物理场组成样本矩阵,$Ra_1=5\ 000$,$Ra_2=10\ 000$,…,$Ra_{20}=100\ 000$.另外,还计算了 $Ra=7\ 500$,67 500,88 000 时的解(这 3 个 Ra 不在设计参数内),用以检验本算法预测流场和温度场的准确程度.增加样本数量并不能进一步提高重构解的精度,可以认为采用 20 个样本即可获得与样本个数 H 无关的解.

2.2 特征值及其最佳正交基

通过对样本矩阵实施最佳正交分解,共得到 20 个基函数和 20 个特征值.表 1 中给出了速度样本和温度样本的前 5 个 ξ 与 η 值,可以发现 2 个样本的 ξ 值减小都很快.由最佳正交分解的性质可知[1-2],通过 POD 获得的基函数具有“能量”最优(对于速度样本而言,“能量”具有严格的物理意义,代表动能;对于温度样本而言,可以理解为在式(1)中的贡献程度[1-2])和快速收敛的特性,即仅用前面几个基函数就可以通过式(1)重构出较为准确的结果.观察图 1 可以发现:排在前面的基函数代表物理场中大尺度的结构,而排在后面的基函数含有越来越多的小尺度结构.

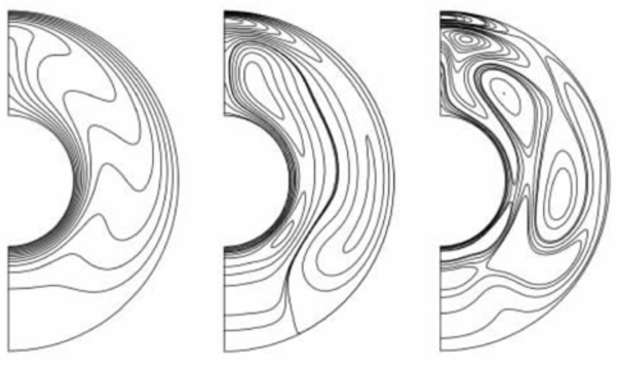
2.3 物理场的重构

为了比较通过 POD 重构得到的物理场与通过数值解求得的物理场间的差距,现定义相对误差 $E=\|f(\boldsymbol{x},t)-f(\boldsymbol{x},t)_{\mathrm{POD}}\|/\|f(\boldsymbol{x},t)\|$,其中 $\|\cdot\|$ 代表范数.图 2 给出了通过式(1)重构的温度场与准确解间的相对误差.从图 2 可以发现:相对误差 E 随着截断自由度 M 的增大而迅速减小,当$M=3$ 时,E 的数值已经到了 1%左右,$M=10$ 时 E 的数值降到 0.000 1%.与温度场相比速度场需要较多的基函数去达到相同精度.

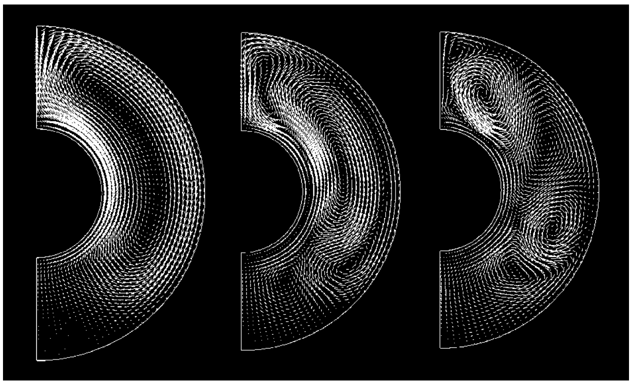
利用在设计参数下得到的最佳正交基同样可以重构设计参数外的解,图 3 给出了 Ra 不同时相对误差 E 与留在式(1)中的截断自由度 M 的关系.从图 3可以看出,随着M的增大,误差E逐渐减小并

表 1 计算得到的 ξ 与 η 值 %

n		1	2	3	4	5
ξ_n	速度样本	99.36	6.00×10^{-1}	2.92×10^{-2}	5.28×10^{-3}	1.97×10^{-4}
	温度样本	98.07	1.84	8.26×10^{-2}	1.03×10^{-2}	7.97×10^{-4}
η_n	速度样本	99.364 977	99.965 281	99.994 504	99.999 784	99.999 998
	温度样本	98.069 607	99.906 171	99.988 770	99.999 048	99.999 845

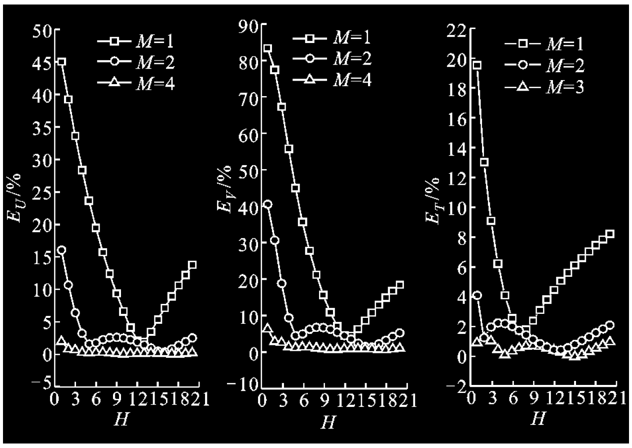


(a)温度样本的前 3 个基函数



(b)速度样本的前 3 个基函数

图 1　运用 POD 技术计算得出的基函数分布



(a)速度 U 的误差　(b)速度 V 的误差　(c)温度的误差

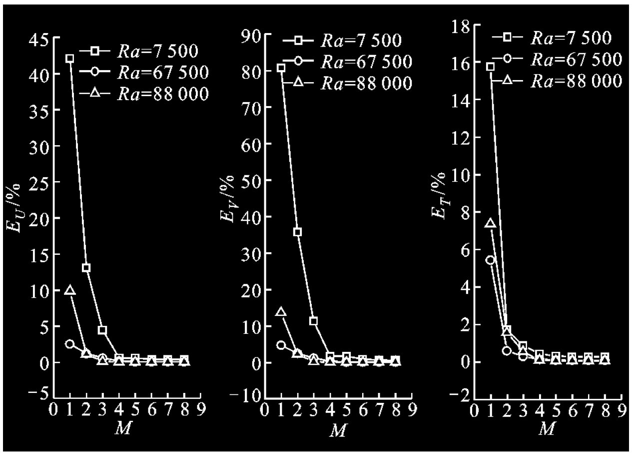
图 2　本文算法的重构性能

趋于一个固定的数值，对于本文的研究，E 在 0.7% 左右.

从表 2 可看出，POD 技术的优势是非常明显的，要比 SIMPLE 算法快将近 100 倍. 本文以 POD 为基础提出的快速预测流动和换热的算法与计算区域的复杂与否和流态无关，只要能给出不同设计参数下一组准确的数据库，就可以利用 POD 技术对其进行分解从而得到用来构建问题解的最佳正交基函数.

表 2　SIMPLE 算法与 POD 技术所需计算时间的比较

Ra	t/s			
	SIMPLE 算法	POD 技术		
		M=1	M=5	M=10
7 500	120.45	1.42	1.45	1.53
67 500	120.48	1.38	1.49	1.56
88 000	120.84	1.50	1.53	1.56



(a)U 速度的误差　(b)V 速度的误差　(c)温度的误差

图 3　本文算法的外推性

3　结　论

本文以 POD 为基础，提出了一种能够快速而准确地预测流动和传热问题的算法，与 SIMPLE 算法相比，计算速度提高了 100 倍. 利用此方法得到的解与精确解的相对误差随着留在级数中的基函数的数量的增大而逐渐减小并且趋于一个定值，在本文中，速度和温度的相对误差 E 约为 0.7%.

参考文献：

[1] Berkooz G, Holmes P, Lumley J L. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows[J]. Annual Review Fluid Mech, 1993, 25: 539-575.

[2] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry [M]. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1996.

[3] Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structure: part Ⅰ[J]. Q Appl Math, 1987(3): 561-571.

[4] Pantankar S V. Numerical fluid flow and heat transfer [M]. New York: Academic Press, 1981.

(编辑　王焕雪)