柔性凸轮曲线的NURBS表达与多目标遗传算法优化

葛荣雨　李世伟　刘　莉

【摘要】 NURBS曲线通过调整节点矢量、控制顶点位置和权因子能够优化曲线形状,因此利用NURBS曲线可以构造柔性的凸轮曲线。为了同时满足凸轮机构的运动学和动力学性能,建立了凸轮曲线的多目标优化模型,并提出一种集成精英保留策略、目标达到法选择策略和快速非支配排序算法的混合遗传算法,求解凸轮曲线的多目标优化模型。优化实例表明,该混合遗传算法可以有效解决多目标优化问题,获得综合特性良好的凸轮曲线。

关键词: 凸轮曲线　多目标优化　目标达到法　遗传算法

中图分类号: TH112.2　　　　**文献标识码**: A

Flexible Cam Curve Expressed by NURBS and Multiobjective Optimization Based on Genetic Algorithm

Ge Rongyu[1]　Li Shiwei[2]　Liu Li[2]

(1. *Shandong University*　2. *Zibo Vocational Institute*)

Abstract

A method to express the flexible cam curve with continuous jerk by using quintic NURBS curve was presented. Then the cam curve could be optimized by adjusting knot vector, control points and weight factors of NURBS curve. The multiobjective optimization for a cam curve was described to satisfy both kinetic and dynamic requirements. To solve the optimization model for NURBS cam curve, a hybrid genetic algorithm combining elitism strategy, selection strategy based on goal attainment method and fast non-dominated sorting algorithm was proposed. The optimization example illustrated that the presented hybrid genetic algorithm could solve multiobjective optimization problem and achieve cam curve with good synthetic performances.

Key words　Cam curve, Multiobjective optimization, Goal attainment method, Genetic algorithm

引言

分度凸轮机构的传统设计中主要采用修正正弦、修正等速和修正梯形凸轮曲线,这些曲线由于跃度在端点不连续,只适用于中低速凸轮机构。高速凸轮机构多采用高次多项式凸轮曲线。这种运动曲线的通用性强,只要幂次数取得足够高,对应高阶导数总是光滑和端点连续的,但设计时需处理好约束条件及解复杂线性方程组[1]。随着CAD技术的发展,一些学者提出以样条函数表达更通用的凸轮曲线[2],同时很多最优化方法被应用到凸轮曲线设计中[3],但上述文献均以凸轮曲线的单目标优化为研究内容,不能满足工程中高速凸轮曲线应具有优良综合性能的要求,基于遗传算法的凸轮曲线优化尚未见报道。非均匀有理B样条(NURBS)方法以其优良的表达性和强大的局部调控特性而受到普遍重视,本文以NURBS曲线表达柔性凸轮曲线,在满足基本运动约束前提下,兼顾运动学和动力学性能要求,构建多目标优化模型,并运用混合遗传算法求解模型。

1　NURBS凸轮曲线

1.1　NURBS曲线数学模型

一条 k 次NURBS曲线可表示为

收稿日期: 2007-06-29
葛荣雨　山东大学机械工程学院　博士生, 250061　济南市
李世伟　淄博职业学院机械与汽车工程系　副教授, 255000　山东省淄博市
刘　莉　淄博职业学院机械与汽车工程系　讲师

$$S(x)=\sum_{i=1}^{n} d_i R_{i,k}(x) \tag{1}$$

$$R_{i,k}(x)=w_i N_{i,k}(x)\Big/\sum_{j=1}^{n} w_j N_{j,k}(x) \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{d}=[d_0 \quad d_1 \quad \cdots \quad d_n]^{\mathrm{T}}$

式中 $\boldsymbol{d}$——控制顶点向量 w_i——权因子

$N_{j,k}(x)$——由节点矢量 $\boldsymbol{U}=[u_0,u_1,\cdots,u_{n+k+1}]$按德布尔-考克斯递推公式决定的 k 次规范B样条基函数

$R_{j,k}(x)$——k 次有理基函数

可见,NURBS曲线由3个参数定义:控制顶点、权因子和节点矢量。改变节点矢量、移动控制顶点位置和修改权因子都可以调整NURBS曲线的形状,且改变某一参数,仅仅改变NURBS曲线的局部形状,而不会影响整体性能,此性质使其明显优于多项式曲线。

1.2 NURBS凸轮曲线的实现

凸轮曲线表达凸轮机构的运动时常采用无因次形式,即对于无量纲的时间 T,无量纲位移表示为

$$S=S(T) \quad (0\leqslant T\leqslant 1,0\leqslant S\leqslant 1) \tag{3}$$

则NURBS凸轮曲线无量纲位移、速度、加速度和跃度可表示为

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n} d_i R_{i,k}(T) \tag{4}$$

$$V(T)=\sum_{i=1}^{n} d_i R'_{i,k}(T) \tag{5}$$

$$A(T)=\sum_{i=1}^{n} d_i R''_{i,k}(T) \tag{6}$$

$$J(T)=\sum_{i=1}^{n} d_i R'''_{i,k}(T) \tag{7}$$

k 次有理基函数 $R_{j,k}(x)$ 的 m 次导数在某时刻 T 满足

$$\sum_{i=1}^{n} R_{i,k}^{(m)}(T)=0 \quad (m=1,2,3,\cdots) \tag{8}$$

由式(8)可方便验证 k 次有理基函数的导数求解正确与否。

为了减少计算量,仅采用基于控制顶点位置和基于权因子的NURBS凸轮曲线优化方法,而节点矢量区间定义为

$$\boldsymbol{U}=\left[0,\cdots,0,\frac{1}{n-k+1},\frac{2}{n-k+1},\cdots,\frac{n-k}{n-k+1},1,\cdots,1\right] \tag{9}$$

两端节点重复度为 $k+1$。由于 k 次NURBS曲线是 C^{k-1} 的,为使凸轮曲线的跃度连续,采用五次NURBS曲线构造凸轮曲线,即 $k=5$,这样可以得到连续的二次跃度曲线。

2 多目标优化问题数学描述

凸轮曲线优化的目的是在不改变几何和自然约束的前提下提高凸轮曲线的运动学和动力学性能,因此凸轮曲线的设计在工程应用中属于典型的多目标优化问题,这里凸轮曲线优化指优化五次NURBS曲线的控制顶点和权因子。求解多目标优化问题的常用方法有合并目标法、交换目标法和基于Pareto最优解的方法,其中基于Pareto最优解的方法具有强大的全局搜索能力和较快的收敛速度,是近年来求解多目标优化问题的主要方法。

以最小化多目标问题为研究对象,一个多目标优化问题可以表示为

$$\begin{cases}\min\ \boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=[f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\\ \text{s.t.}\ \ g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,p)\\ \qquad h_j(\boldsymbol{x})=0 \quad (j=1,2,\cdots,q)\end{cases} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{x}$——决策向量,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$

$\boldsymbol{y}$——目标向量,$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m$

g_i、h_j——约束函数

由于多目标优化问题中各目标函数之间往往是不可公度的,多目标优化问题的最优解使各个子目标函数都尽可能地达到最优,称为Pareto最优解。通常情况下,多目标优化问题的Pareto最优解是一个最优解集合。多目标优化算法的目标就是构造非支配集,并使非支配集不断逼近最优解集,最终达到最优。

3 混合遗传算法设计

本文基于Pareto最优解和目标达到法多目标规划的思想,提出了一种混合遗传算法优化凸轮曲线。混合遗传算法的流程如图1所示,在混合遗传算法的整体框架内,集成了目标达到法选择策略、精英保留策略和快速非支配排序算法,保证了算法的快速收敛性。

3.1 种群编码与初始化

NURBS曲线的控制顶点和权因子属于多维优化变量,编码采用实数编码方式。且由于权因子 w_i 分别和控制顶点 d_i 相联系,所以一个可行的编码为 $[w_0 \quad d_0 \quad w_1 \quad d_1 \quad \cdots \quad w_n \quad d_n]$。由于修正梯形(modified trapezoidal,简称MT)凸轮曲线是一种性能良好的凸轮曲线,为了提高遗传算法的收敛速度,为接近全局最优个体播种,从MT凸轮曲线上随机选取 $n+1$ 个点组成的向量作为初始种群控制顶点向量,而权因子均取为1。重复上述操作 P 次,

便得到规模为 P 的初始种群。这种方法产生的初始种群大部分个体可以满足约束条件，并很接近于 Pareto 解集。

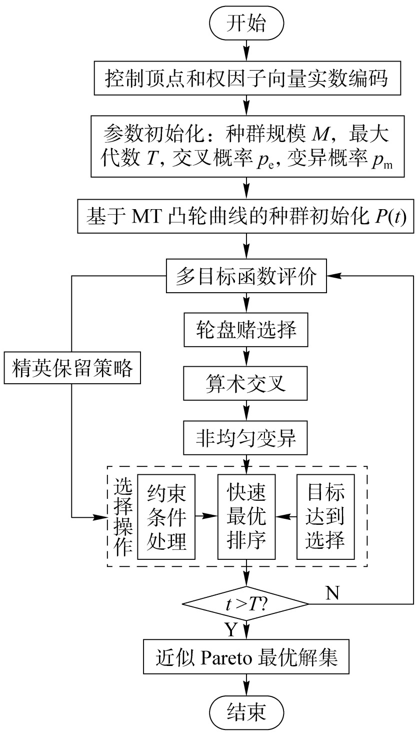

图 1　混合遗传算法流程图

Fig. 1　Flowing diagram of hybrid genetic algorithm

3.2　选择操作

选择操作可实现优胜劣汰，这里采用轮盘赌选择的方法选取要进行交叉和变异的个体。为了保证优秀个体不会因交叉变异被破坏，采用精英保留策略，使当前群体中适应度最高的 Pareto 解个体不参与交叉和变异，而用来替换本代群体中经过交叉、变异等遗传操作后所产生的目标函数值较大的个体。实施精英保留策略后的种群个体数量超过了规定的群体规模 M，需要进行第 2 次选择。这里首先以 NSGA－Ⅱ[4] 中的快速最优排序算法对群体中的所有个体排序，并附加约束条件处理和目标达到法选择。

3.2.1　约束条件处理

优化时为简化约束条件的处理，等式约束的处理方案是降维法，使优化变量维数降低，并消去等式约束。若两端节点的重复度取为 $k+1$，且限定权因子 $w_i \neq 0(i=0,1,\cdots,n)$，NURBS 曲线首末端点恰好是首末控制顶点，所以对于凸轮曲线无量纲位移等式约束 $S(0)=0, S(1)=1$，可得 $d_0=d_n=0$。对于无量纲速度和加速度约束 $V(0)=0, A(0)=0, V(1)=0, A(1)=0$，由式(8)得 $d_1=d_2=d_{n-1}=d_{n-2}=0$。这样，降维后编码形式变为$[w_3 \quad d_3 \quad \cdots \quad w_{n-3} \quad d_{n-3}]$。

3.2.2　目标达到法选择

多目标优化能得到目标函数的近似最优解集，但凸轮曲线优化的目的是保证良好的综合特性。所以混合遗传算法集成了多目标规划中的目标达到法思想，不是求出分布在整个解空间的个体，而是求出某一目标值 $\boldsymbol{f}^*(x)=[f_1^*(\boldsymbol{x}), f_2^*(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m^*(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$ 附近的最优个体，具体算法如图 2 所示。把目标函数的值域限定为以 OY 为中心轴线、半锥角为 α 的锥体内(如果有两个目标函数，则是三角区域)，对于某一个体的目标函数向量 Z，设 OZ 与 OY 夹角为 β，如果 $\beta<\alpha$，则该个体的目标函数值在限定区域内，可以作为子代种群的个体，否则不被选择作为后代个体。

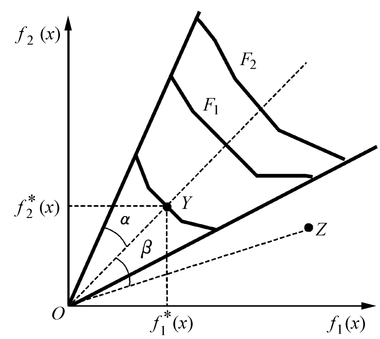

图 2　目标达到选择方法

Fig. 2　Selecting based on goal attainment method

3.3　交叉和变异操作

交叉和变异操作能够搜索新的基因空间，帮助收敛过程跳出局部最优，增加种群的多样性，是种群遗传进化的核心步骤。

对于实数编码的凸轮曲线遗传算法优化问题，交叉操作采用算术交叉，即染色体 X 的第 i 个基因 x_i 可以通过两个父代个体 A 和 B 交叉得到

$$x_i=r_i a_i+(1-r_i) b_i \tag{11}$$

式中　r_i——区间(0,1)的随机数

父代个体 A 和 B 是通过二人制随机联赛选择方法从当前种群中选取的。交叉后的个体 X 再进行如下变异操作

$$x_i=r_{1,i} x_i+(1-r_{1,i})[r_{2,i}(u-l)+l] \tag{12}$$

$[u, l]$是控制顶点和权因子的取值范围，这里均取为$[0,1]$。

4　优化实例

$V_m(T)$、$A_m(T)$和 $J_m(T)$分别表示凸轮曲线的最大速度、最大加速度和最大跃度，这些无量纲最大值称为凸轮曲线的特性值，常作为凸轮曲线优化的目标函数。设某一非对称凸轮曲线优化模型为

$$\begin{cases} \min A_m(T) \\ \min J_m(T) \\ V_m(T) \leqslant 2.0 \\ \boldsymbol{h}(T)=0 \end{cases} \tag{13}$$

且有

$$\boldsymbol{h}(T)=[S(0),V(0),A(0),S(1)-1,V(1),A(1)]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

现用五次 NURBS 曲线表达凸轮曲线，且取 $n=15$，则对等式约束降维处理后需要优化的控制顶点和权因子变量为 20 个，理想的加速度和跃度特性值设为 $\boldsymbol{f}^*=[4.9\quad 61.4]$，混合遗传算法参数选取如下：种群规模为 50，最大进化代数为 1 000 代，交叉概率为 0.5，变异概率为 0.015。用混合遗传算法优化两个目标函数，优化结果如图 3 所示。为了验证算法的有效性，选部分优秀个体，与 MT 凸轮曲线的特性值进行比较，比较结果列于表 1，其中凸轮曲线 1 的位移、速度、加速度和跃度曲线如图 4 所示。由表 1 看到，通过混合遗传算法优化得到的五次 NURBS 凸轮曲线的最大速度、最大加速度和最大跃度特性都优于 MT 凸轮曲线，说明提出的优化方法能获得综合性能更好的凸轮曲线。

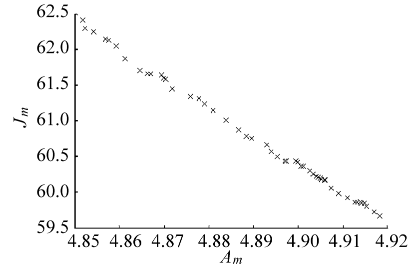

图 3 两个目标函数混合 GA 优化结果

Fig. 3 Optimization results of two objective functions based on hybrid GA

表 1 NURBS 凸轮曲线与 MT 曲线特性值比较

Tab. 1 Contrast between characteristic value of obtained NURBS cam curves and MT curves

优秀个体	特性参数		
	V_m	A_m	J_m
曲线 1	1.993 9	±4.879	±61.25
曲线 2	1.993 5	±4.878	±61.32
曲线 3	1.996 3	±4.876	±61.35
MT 曲线	2.000 0	±4.880	±61.40

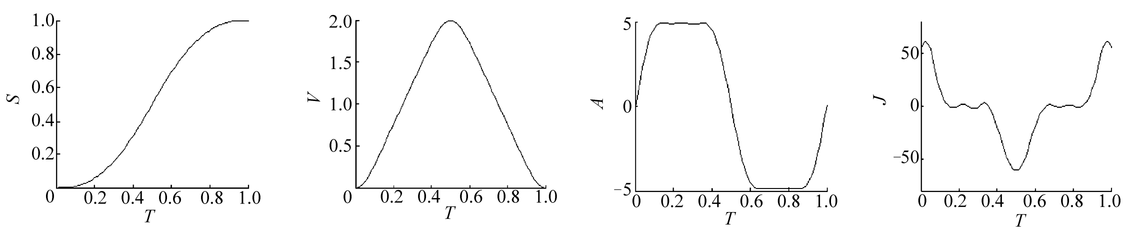

图 4 五次 NURBS 凸轮曲线

Fig. 4 Quintic NURBS cam curves

5 结论

(1)NURBS 凸轮曲线性能取决于节点矢量、控制顶点位置和权因子大小，可以根据不同设计要求自由调整，如调整某一控制顶点，可以得到不同综合性能的凸轮曲线，所以 NURBS 凸轮曲线是一种柔性通用凸轮曲线。

(2)凸轮曲线的多目标优化克服了工程中单一目标优化的缺陷，在满足基本几何约束和工程约束前提下，可以获得同时具有良好运动学和运动学性能的凸轮曲线，因此相比目前的单目标性能优化，更能起到指导实践的作用。

(3)混合遗传多目标优化算法集成了精英保留策略和快速非支配排序算法，并提出了目标达到选择方法，可以搜索某理想目标点附近的最优个体。通过该算法获得的凸轮曲线综合性能明显优于工程应用中一些传统凸轮曲线。

参 考 文 献

1 侯悦民，张伟，鲍莉．利用三次均匀 B 样条曲线优化设计凸轮廓线[J]．农业机械学报，2000，31(2)：71～74．

2 Neamtu M, Pottmann H, Schumaker L L. Designing NURBS cam profiles using trigonometric splines[J]. Journal of Mechanical Design, 1998, 120(6): 175～180.

3 Vu-Thinh Nguyen, Do-Joong Kim. Flexible cam profile synthesis method using smoothing spline curves[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(7): 825～838.

4 Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-Ⅱ[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182～198.