

管道曲面上轮式机器人的极值轨道研究*

肖刚 刘三阳 余国林

【摘要】 对轮式机器人在管道表面上的极值轨道问题进行了研究。在管道曲面上建立了轮式机器人的动态模型,证明轮式机器人是可控的,并且存在时间最优轨道,利用庞特里亚金最大值原理给出了轮式机器人最小时间控制的必要条件,并给出了极值轨道的结构方程,通过结构方程分析了管道曲面上移动机器人的极值轨道,指出极值轨道的控制变量完全由结构方程来确定,并且机器人的极值轨道由2种基本轨道类型的有限组合而成,给出了这2种基本轨道类型控制变量的变化情况。

关键词: 机器人 管道曲面 极值轨道 动态模型 结构方程

中图分类号: TP242 **文献标识码:** A

Extremum Trajectories of Wheeled Robot on Pipeline Surfaces

Xiao Gang¹ Liu Sanyang¹ Yu Guolin²

(1. Xidian University 2. North University for Ethnic)

Abstract

The extremum trajectories of wheeled robot on pipeline surfaces was studied. The dynamic model of the wheeled mobile robot on pipeline surfaces was presented, and then the controllability of robots and the existence of time optimal trajectories were proved. By applying Pontryagin's maximum principle, the necessary conditions of time optimal control were obtained, and the structure equations of extremal trajectories were given. The extremum trajectories were studied with the analysis of structure equations. It was notified that control variables of the extremum trajectories were defined by structure equations. The extremum trajectories were combined finitely by two basic types of trajectories. Moreover, the exact values for the control variables of this two basic types were given.

Key words Robot, Pipeline surface, Extremum trajectory, Dynamic model, Structure equation

引言

轮式机器人在管道内运动时具有特殊的几何约束,机器人在管道曲面上移动的运动规律比平面上复杂。为解决管道曲面上轮式机器人的极值轨道问题,本文利用微分几何的方法^[1~5],把轮式机器人在平面上的运动推广到管道曲面上,得到机器人在管道曲面上移动的动态模型。在此基础上,分析机器人

的可控性和时间最优轨道的存在性,并给出动态模型的结构方程,通过结构方程分析极值轨道的类型。

1 管道曲面上轮式机器人的动态模型

轮式机器人在管道曲面内移动,如图1所示。设由两个轮子控制机器人的移动,两轮的间距为 $2b$,轮子的速度分别为 v_1 和 v_2 ,并且速度的大小满足 $v_i \in [-1, 1], i=1, 2$ 。定义变量 u_1 和 ω 为

收稿日期: 2007-02-28

* 国家自然科学基金资助项目(项目编号:60574075)

肖刚 西安电子科技大学理学院 博士生, 710071 西安市

刘三阳 西安电子科技大学理学院 教授 博士生导师

余国林 北方民族大学应用数学系 副教授, 750021 银川市

$$\begin{cases} u_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \omega = \frac{v_2 - v_1}{2b} \end{cases} \quad (1)$$



图 1 管道中的移动机器人
Fig. 1 Mobile robot in pipe

u_1, ω 的值域如图 2b 所示。显然 u_1 表示机器人的移动速度控制变量, ω 表示机器人的旋转控制变量。

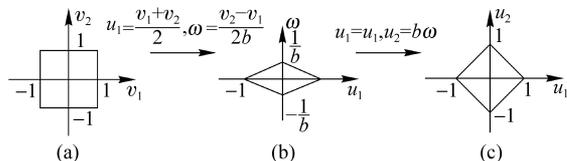


图 2 控制变量的变换

Fig. 2 Transposition of control variables

机器人在没有旋转控制的条件下 ($\omega = 0$), 若在平面上移动时, 沿着直线移动; 而在管道曲面上, 则沿着测地线移动。设管道曲面为柱面 S , 设柱面的曲纹坐标为半测地坐标网, 对于这个坐标网而言, 曲面的第一基本形式可以简化为

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2$$

高斯曲率为

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

其中 u 和 v 是曲面 S 的参数或曲纹坐标, s 是弧长参数。设 t 表示时间, 则有 $ds = u_1 dt$ 。若 $\omega \neq 0$, 由于旋转控制变量控制机器人运动的方向的变化, 设 θ 为运动曲线的切方向, 此时 $\frac{d\theta}{dt} = -u_1 \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}} \sin\theta + \omega$ 。

这样机器人在管道表面上的运动轨迹方程满足

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u_1 \cos\theta \\ \frac{dv}{dt} = u_1 \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}} \\ \frac{d\theta}{dt} = -u_1 C \sin\theta + \omega \end{cases} \quad (\text{a. e.}) \quad (2)$$

其中 $C = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}}$, a. e. 表示方程除了一些测度为零的点外都成立。

$$\text{设 } \mathbf{x} = (u, v, \theta)^T, \mathbf{f}_1 = \left(\cos\theta, \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}, -C \sin\theta \right)^T,$$

$$\mathbf{f}_2 = \left(0, 0, \frac{1}{b} \right)^T, u_2 = b\omega, \text{ 则式(2)可表示为}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = u_1(t) \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + u_2(t) \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$$

$$(\mathbf{x} \in S \times S^1, (u_1, u_2) \in U) \quad (3)$$

其中 u_1, u_2 为控制变量, $U = \{(u_1, u_2) \mid |u_1| + |u_2| = 1, (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2\}$ (如图 2c 所示), S 表示柱面, S^1 表示

单位圆, 则 $S \times S^1$ 是一个三维流形。称式(3)为管道表面上的轮式机器人的动态模型。

定理 1: 管道表面上的轮式机器人是可控的。

证明: 对于管道表面上的轮式机器人的动态模型式(3), 计算李括号运算可知

$$\mathbf{f}_3 = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{1}{b} \left(\sin\theta, -\frac{\cos\theta}{\sqrt{G}}, C \cos\theta \right)^T$$

可以验证秩 $\text{rank}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\} = 3$, 则向量场 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ 满足李代数秩条件, 由文献[2]定理 3.1 可知机器人是可控的。

定理 2: 管道表面上的轮式机器人存在从始点到终点的绝对连续时间最优轨道和相应可测控制。

证明: 由上讨论可知, 动态模型式(3)满足下列条件: 存在一个使机器人从始点到终点的控制; 状态变量 $\mathbf{x} = (u, v, \theta)^T$ 定义在微分流形的开子集上; $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ 满足局部 Lipschitz 条件; 控制向量 (u_1, u_2) 是在 \mathbf{R}^2 上的紧凸子集上取值的可测函数; 对于每个控制函数和初始条件 $\mathbf{p} \in S$, 存在一个定义在整个区间 $[a, b]$ 上的轨道 γ , 满足 $\gamma(a) = \mathbf{p}$ 。由文献[2]定理 6 可知, 对于曲面 S 上两点 \mathbf{p}, \mathbf{q} , 存在从 \mathbf{p} 到 \mathbf{q} 的最优轨道及相应可测控制。

2 管道曲面上轮式机器人的极值轨道类型

考虑流形 M 上的最优时间控制问题

$$\begin{cases} \min T \\ \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{w}(t)) \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}(T) = \mathbf{q}_1 \end{cases} \quad (\mathbf{q}(t) \in M, \mathbf{w}(t) \in U \subset \mathbf{R}^m) \quad (4)$$

其中 M 表示微分流形, \mathbf{q} 表示流形 M 上的点, $\mathbf{w} \in U$ 是控制参数。设 $\lambda(t)$ 是流形 M 的余切空间 T^*M 的一个余切向量, 定义 Hamilton 函数

$$H(\lambda(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{w}(t)) = \langle \lambda(t), \mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{w}(t)) \rangle \quad (5)$$

引理 3^[7] (庞特里亚金最大值原理): 设 $\mathbf{w}(t)$, $t \in [0, T]$ 是最优时间控制问题的最优控制, 那么存在一个 Lipschitz 曲线 $\lambda(t) \in T_{\mathbf{q}(t)}^* M, t \in [0, T]$ 以及数 $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ 满足

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{a. e.}) \quad (6)$$

$$H(\lambda(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{w}(t)) =$$

$$\min_{\mathbf{w} \in U} \{ \langle \lambda(t), \mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{w}(t)) \rangle \} \quad (\text{a. e.}) \quad (7)$$

$$H(\lambda(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{w}(t)) + \lambda_0 \equiv 0 \quad (\text{a. e.}) \quad (8)$$

$$(\lambda(t), \lambda_0) \neq (0, 0) \quad (t \in [0, T], \lambda_0 \geq 0) \quad (9)$$

若曲面上一个轨道 $\mathbf{q}(t)$ 满足最大值原理的必要条件式(6)~(9), 则称轨道 $\mathbf{q}(t)$ 为极值轨道。显然时间最优控制轨道是极值轨道, 但反之不一定成立。若

机器人没有移动,则称轨道是平凡的。下面给出动态模型式(3)的结构方程。

$$\begin{aligned} \text{已知 } \mathbf{f}_1 &= \left(\cos\theta, \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}, -C\sin\theta \right)^T, \mathbf{f}_2 = \left(0, 0, \right. \\ &\left. \frac{1}{b} \right)^T, \mathbf{f}_3 = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{1}{b} \left(\sin\theta, -\frac{\cos\theta}{\sqrt{G}}, C\cos\theta \right)^T, \text{ 设} \\ &\begin{cases} \varphi_1(t) = \langle \lambda(t), \mathbf{f}_1(\mathbf{q}(t)) \rangle \\ \varphi_2(t) = \langle \lambda(t), \mathbf{f}_2(\mathbf{q}(t)) \rangle \\ \varphi_3(t) = \langle \lambda(t), \mathbf{f}_3(\mathbf{q}(t)) \rangle \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

则 Hamilton 函数

$$H(\lambda(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{w}(t)) = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 \quad (11)$$

定理 4: 若 $\mathbf{q}(t)$ 为动态模型式(3)的时间最优轨道, 则对于几乎所有的 $t \in [0, T]$, 控制变量 u_1, u_2 满足

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} |u_1| = 1, u_2 = 0 & (|\varphi_1| > |\varphi_2|) \\ |u_1| + |u_2| = 1 & (|\varphi_1| = |\varphi_2|) \\ |u_2| = 1, u_1 = 0 & (|\varphi_1| < |\varphi_2|) \end{cases} \quad (12)$$

证明: 由引理 3 直接可得。

引理 5^[2]: 设 \mathbf{f}_i 是一个光滑向量场, $\mathbf{q}(t)$ 是关于控制 $\mathbf{w}(t)$ 的时间最优轨道, 设 $\varphi_i(t) = \langle \lambda(t), \mathbf{f}_i(\mathbf{q}(t)) \rangle$, 那么对于几乎所有的 $t \in [0, T]$ 有

$$\dot{\varphi}_i(t) = u_1 \langle \lambda(t), [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_i] \rangle + u_2 \langle \lambda(t), [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_i] \rangle \quad (13)$$

由于 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ 线性无关, 并且 $\lambda(t)$ 始终不为零, 由式(9)可得

$$|\varphi_1| + |\varphi_2| + |\varphi_3| \neq 0 \quad (14)$$

因为 $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3] = -K\mathbf{f}_2, [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = \frac{1}{b^2}\mathbf{f}_1$, 管道曲面的高斯曲率 $K=0$, 由引理 5 直接计算可以得到

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = -u_2\varphi_3 \\ \dot{\varphi}_2 = u_1\varphi_3 \\ \dot{\varphi}_3 = \frac{u_2}{b^2}\varphi_1(t) \end{cases} \quad (15)$$

由式(15)可以推导出

$$u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 = -\lambda_0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{b^2}\varphi_1^2 + \varphi_3^2 = \kappa \quad (17)$$

式中 κ 为常数。式(14)~(17)称为动态模型式(3)的结构方程。

定理 6: 在非平凡极值轨道上不存在 φ_1 与 φ_2 公共零点。

证明: 设 $\mathbf{q}(t)$ 为管道曲面上的极值轨道, 若存在点 t_0 满足 $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = 0$, 由式(16)可知 $\lambda_0 = 0$ 。因在 $[0, T]$ 上 λ_0 是常数, 由定理 4 得到 φ_1, φ_2 在 $[0, T]$ 上全为零, 由式(14)可得 $\varphi_3 \neq 0$, 由式(15)可得

$u_1 = u_2 = 0$, 即 $v_1 = v_2 = 0$, 则机器人没有移动, 与非平凡极值轨道矛盾。

定义函数 $\delta(t) = |\varphi_1(t)| - |\varphi_2(t)|$ 。因 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 是连续函数, 所以 $\delta(t)$ 也是连续函数, 并且满足 $\delta(t) = 0$ 的点是 $[0, T]$ 上的闭子集。若在 $(-\infty, +\infty)$ 上讨论 $\delta(t)$, 则满足 $\delta(t) > 0$ 或 $\delta(t) < 0$ 的点集是 $(-\infty, +\infty)$ 上的开集, 若把这些开区间限制在 $[0, T]$ 上, 交集或者是包含在 $[0, T]$ 内的开区间, 或者是包含区间端点的半开区间, 或者是区间 $[0, T]$, 这些区间称为相对开集。满足 $\delta(t) = 0$ 的点称为奇异点或奇异区间, 满足 $\delta(t) \neq 0$ 的相对开集称为非奇异区间。

定理 7: 在管道曲面上轮式机器人的极值轨道上, 非奇异区间的个数是有限的。

证明: 由 $\delta(t)$ 的连续性, 满足 $\delta(t) > 0$ 或 $\delta(t) < 0$ 的点在 $[0, T]$ 上不可能是孤立点, 这些点是 $[0, T]$ 上的相对开集。下面分别讨论 $\delta(t) > 0$ 和 $\delta(t) < 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上对应的开区间长度。

$$(1) \delta(t) > 0, |u_1| = 1, u_2 = 0$$

由式(15)可得

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1(t) = 0 \\ \dot{\varphi}_2(t) = u_1\varphi_3(t) \quad (\text{a. e.}) \\ \dot{\varphi}_3(t) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

则方程的解为 $\varphi_1 = \pm\lambda_0, \varphi_3 = c_1$ 。当 $c_1 = 0$, 则 $\varphi_2 = c$, 若 $|c| < \lambda_0$, 则在整个区间 $[0, T]$ 上, 有 $\delta(t) > 0$ 。若 $|c| \geq \lambda_0$, 满足 $\delta(t) > 0$ 的点集是空集。当 $\varphi_3 = c_1 \neq 0$, 求解微分方程式(18)得 $\varphi_2(t) = u_1c_1t + c_2, \varphi_3 = c_1$, 其中 c_1, c_2 为任意常数。设满足 $\delta(t) > 0$ 连通开集的最小长度为 τ_1 , 如图 3 所示。

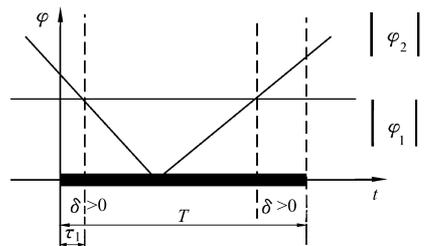


图 3 方程式(18)的解

Fig. 3 Solutions of equation (18)

$$(2) \delta(t) < 0, u_1 = 0, |u_2| = 1$$

由式(15)可得

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1(t) = -u_2\varphi_3(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) = 0 \\ \dot{\varphi}_3(t) = \frac{u_2}{b^2}\varphi_1(t) \end{cases} \quad (\text{a. e.}) \quad (19)$$

求解方程式(19)可得

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = -u_2bc_3\sin\left(\frac{t}{b} + \alpha\right) \\ \varphi_2(t) = \pm\lambda_0 \\ \dot{\varphi}_3 = u_2c_3\cos\left(\frac{t}{b} + \alpha\right) \end{cases}$$

其中 c_3, α 为任意常数。由式(17)可得 $c_3 = \pm\sqrt{\kappa}$ 。设满足 $\delta(t) < 0$ 点的连通开集的最小长度为 τ_2 ，如图 4 所示。

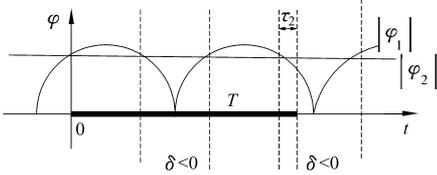


图 4 方程式(19)的解

Fig. 4 Solutions of equation (19)

由情形 1、2 讨论可知，满足 $\delta(t) \neq 0$ 点连通开集的最小长度 τ_1, τ_2 是有下界的，所以限制在区间上的相对开集的长度是有下界的，即非奇异区间的个数是有限的。

定理 8：在管道曲面上轮式机器人的极值轨道上，满足 $\delta(t) = 0$ 的点或者是孤立点或者是闭区间。

证明：由定理 7 可知限制在区间 $[0, T]$ 上满足 $\delta(t) \neq 0$ 的点连通开集最小长度是有下界的，设下界为 τ_0 。设在 $[0, T]$ 上 t_1, t_2 满足 $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$ ，若区间 $[t_1, t_2] < \frac{\tau_0}{2}$ ，则在整个区间 $[t_1, t_2]$ 上， $\delta(t) = 0$ ；

否则，若有 $t_3 \in [t_1, t_2]$ ，满足 $\delta(t_3) > 0$ 或 $\delta(t_3) < 0$ 。因连通开集的长度是有下界的，则对于 $t \in [t_1, t_2]$ ，有 $\delta(t_3) > 0$ 或 $\delta(t_3) < 0$ ，这与 $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$ 矛盾，证毕。

定理 9：在管道曲面上轮式机器人的非平凡极值轨道上，若存在奇异区间，则机器人在此区间上沿测地线移动。

证明：若在 $[a, b] \subset [0, T]$ 上有 $\delta(t) = 0$ ，由式(12)可知，在此区间上 $|\varphi_1| = |\varphi_2| = \lambda_0$ ，则 $\dot{\varphi}_1(t) = 0, \dot{\varphi}_2(t) = 0$ 。若在 $[a, b]$ 存在 $\varphi_3(t) \neq 0$ 的点，因 $\varphi_3(t)$ 是连续函数，由式(15)可得 $u_1 = u_2 = 0$ ，矛盾，所以 $\varphi_3(t) = 0$ 。由式(17)得 $u_2 = 0$ ，所以 $|u_1| = 1$ ，即机器人向前或向后沿测地线移动。

由定理 6~9 可以得到，机器人在管道曲面上的极值轨道由下列 2 种基本轨道类型通过有限组合而成：① 旋转轨道，即控制变量为 $|u_2| = 1, u_1 = 0$ 的情形。② 测地线轨道，即控制变量为 $|u_1| = 1, u_2 = 0$ 的情形。

3 结束语

把平面上移动机器人极值轨道问题扩展到管道曲面上，得到了曲面上轮式机器人动态模型。通过对结构方程的分析得到，管道曲面上轮式机器人极值轨道由 2 种基本轨道类型有限组合而成。

参 考 文 献

- 1 张淑珍, 杨萍, 党兴武. 基于解析法的管道清灰机器人操作臂分析及仿真[J]. 农业机械学报, 2006, 37(9): 149~152.
- 2 Hector J S, Guoqing T. Shortest paths for the reeds-sheep car: a worked out example of the use geometric, techniques in nonlinear optimal control [J]. Rutgers Center for Systems and Control Technical Report, 1991, 91 (10): 1~7.
- 3 Monroy-Perez. Non-euclidean dubins problem [J]. Dynam. Control Systems, 1998, 4(2): 249~272.
- 4 Boscaïn U, Nikolaev I, Piccoli B. Classification of stable time-optimal controls on 2-manifolds [J]. Journal of Mathematical Sciences, 2006, 135(4): 3 109~3 124.
- 5 Balkcom D J, Mason. Extremal trajectories for bounded velocity mobile robots[C]//Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, San Francisco, 2000: 2 479~2 484.
- 6 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1988.
- 7 Jurdjevic V. Geometric control theory [M]. Cam. Univ. : Cambridge Press, 1997.