

## 岩石与混凝土水力劈裂缝内水压分布的计算

李宗利<sup>1,2</sup>, 任青文<sup>2</sup>, 王亚红<sup>1</sup>

(1. 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100; 2. 河海大学 土木工程学院, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 假定岩石与混凝土水力劈裂过程的裂缝形态为椭圆形, 根据自然营造力作用下产生水力劈裂的边界条件, 从流体质量守恒和动量守恒定律出发, 采用控制体积法推导出水力劈裂裂缝流体运动质量守恒定律的表达式及缝内水压分布的微分方程, 并得到在裂缝扩展稳定状态任意时刻缝内压力的计算式。从定性和定量两个方面与已有的试验结果比较, 论证了本文计算公式是正确的, 在裂缝快速开裂的情况下计算结果与试验吻合较好。

**关键词:** 水力劈裂; 缝内水压; 理论计算式; 岩石; 混凝土

**中图分类号:** 0357.3 **文献标识码:** A

高压隧洞在内水压力作用下或深埋地下洞室在外界高水头地下水作用下, 衬砌体和周围岩体内不同程度存在水力劈裂作用<sup>[1-3]</sup>, 水力劈裂作用也是高水头混凝土坝体上游面裂缝失稳扩展的重要因素之一。水力劈裂是高压水流或其它液体将岩体或混凝土内已有的裂隙和空隙驱动扩张、扩展、相互贯通等物理现象, 水力劈裂过程也是水流在较小岩体或混凝土间隙内运动与周围固体变形耦合过程, 缝内水压分布规律是连接流固耦合分析的纽带。

水力劈裂一词起源于石油天然气行业, 其机理研究相对较多, 但这些研究是基于人工致裂, 即在恒定流量、恒定水头下岩体的开裂问题, 重点研究施加多大的高压水头能使岩体开裂<sup>[4-7]</sup>。在水利水电工程行业中的深埋地下结构、高坝、边坡等水流自然营造力所产生的水力劈裂却基本上是恒水头(如压力隧洞和水库坝体)或变水头和变流量情况下产生的, 因其边界条件不同, 水力劈裂机理和缝内水压分布也就不一定相同。由于水力劈裂机理的复杂性, 目前对自然营造力作用下的水力劈裂机理研究较少, 尤其是单裂缝的水力劈裂问题。虽然针对混凝土坝水力劈裂的研究已有少量文献<sup>[8-12]</sup>, 但混凝土高坝设计和地下结构围岩稳定分析中还不能很好地考虑这部分影响<sup>[13-15]</sup>。Brühwi ler和Saouma<sup>[8, 9]</sup>通过混凝土试件的水力劈裂试验, 研究不同级配混凝土缝内水压分布规律。Sl owi k和Saouma<sup>[10]</sup>研究裂缝边缘张开速度不同时缝内水压梯度分布随时间的变化规律。Ti nawi 和Gui zani<sup>[11]</sup>研究初始形状为矩形, 裂缝长度固定不变, 裂缝壁仅刚性张开、闭合、形状为梯形的坝体上游面已存在的裂缝, 从理论上推导了缝内水压分布计算式, 并应用有限元分析法研究了不同地震波作用下裂缝快速张开、闭合时坝体上游面缝内压力的变化情况。文献[12]研究混凝土拱坝上游面初始裂缝缝内水压为不同分布形式时裂缝开展情况及坝体应力特性。

从经典断裂力学理论和文献[6]知, 裂缝的扩展形状为椭圆形, 本文就以此为前提, 假定裂缝形状为半椭圆形推导缝内水压分布, 放弃恒定流量边界条件, 推导水力劈裂裂缝流体的质量守恒方程和缝内水压分布理论计算式, 并与Sl owi k和Saouma的试验结果比较, 探讨公式的适用范围。

收稿日期: 2004-09-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50379005)

作者简介: 李宗利(1967-), 男, 陕西凤翔人, 副教授, 博士生, 主要从事水工结构计算理论研究。

E-mail: zongli02@163.com

## 1 裂缝水流运动基本理论

描述空间流体运动的一般方程是Navier-Stokes方程, 结合边界条件从理论上构成了流体运动状态的完备描述<sup>[16]</sup>, 然而, 因流体运动状态及边界条件的复杂性, 目前仅能对一些简单边界问题求解, 如平行板之间层流运动(泊肃叶流动<sup>[16]</sup>)。而对于大多数问题Navier-Stokes方程难以得到理论解, 往往需要简化模型和计算方法, 但不管采用什么方法, 求解过程应遵循质量守恒和动量守恒定律。

混凝土和岩体水力劈裂裂缝的长度与宽度之比往往在 $10^4$ 以上数量级。水流在这样一个很小的缝隙内流动, 可以忽略压力沿裂缝宽度方向的变化, 认为压力仅沿长度方向变化。对这种问题采用控制体积法求解比直接通过Navier-Stokes方程求解更为有效<sup>[11]</sup>, 而且精度完全能够满足工程要求。控制体积法就是沿裂缝长度方向取若干个微段体积, 通过研究微段的运动来得到问题的解。

采用控制体积法求解时, 不可压缩液体质量守恒定律可描述为

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \int_V dV + \rho \oint_{\Omega} (u \cdot n) dA = 0 \quad (1)$$

式中:  $V$ 为控制体体积;  $\Omega$ 为控制体的表面;  $m$ 为控制体质量;  $\rho$ 为水的质量密度;  $u$ 为速度矢量;  $n$ 为控制体表面的外法线矢量。

不可压缩液体动量守恒定律描述为

$$\frac{dM}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \int_V u dV + \rho \oint_{\Omega} u (u \cdot n) dA = \sum F \quad (2)$$

式中:  $M$ 为控制体积的动量;  $F$ 为作用在控制体积上的力矢量。

## 2 裂缝水压分布理论计算式

**2.1 基本假定** 基本假定如下: (1)水的体积是不可压缩的; (2)水流属于牛顿流体, 满足摩擦定律; (3)裂缝壁渗透系数很小, 流体滤失量可以忽略; (4)水流在裂隙内的运动属于一维层流, 任一断面任意时刻流速分布符合泊肃叶流动<sup>[16]</sup>; (5)裂缝在某一个方向宽度远大于其它两个方向, 在该方向取单位宽度, 简化为平面问题研究, 在该平面内裂缝形状为半椭圆形。

如图1(a), 在任意时刻裂缝形态方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

式中:  $a$ 、 $b$ 分别为任意时刻椭圆的长轴和短轴, 是关于时间 $t$ 的函数。

流速分布如图1(b)所示, 为

$$u_{x,y} = u_0 \left( 1 - \frac{4y^2}{w_x^2} \right) \quad (4)$$

式中： $u_{x,y}$ 为任一点流速(因本文研究均指任意时刻流体状态，为了简单，省略下标 $t$ ，以下同)； $u_0$ 为研究断面最大流速； $w_x$ 为 $x$ 断面处裂缝宽度。

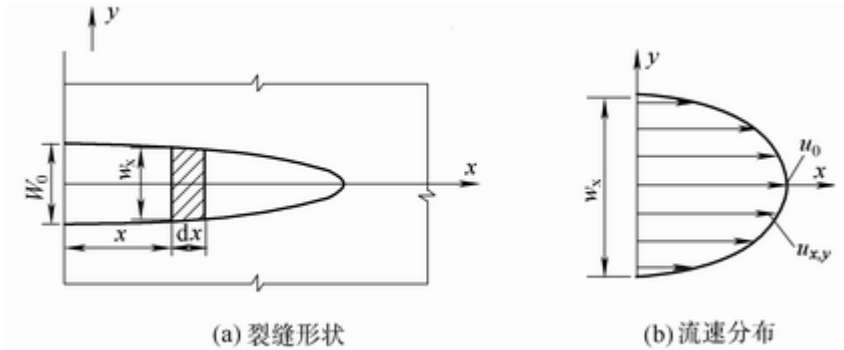


图 1 裂缝形状与断面流速分布

2.2 质量守恒 式(1)右侧第一项为控制体质量随时间的变化率，对于不可压缩液体则为体积变化率，第二项为控制体周围各面流出和流入的水的通量。

取 $x$ 处一微段 $dx$ 如图1，位于 $x$ 断面处裂缝宽度为 $w_x$ 、任一点流速为 $u_{1x,y}$ 、平均流速为 $\bar{u}_1$ 、最大流速为 $u_{01}$ 、通过流量为 $q_x$ ；位于 $x+dx$ 断面处裂缝宽度为 $w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx$ 、任一点流速为 $u_{2x,y}$ 、平均流速 $\bar{u}_2$ 、最大流速为 $u_{02}$ 、通过流量为 $q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$ 。

下面分别计算式(1)中各项，按平面问题考虑。微段 $dx$ 的体积为

$$\int_V dV = \frac{1}{2} \left( w_x + w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx \right) dx \approx w_x dx \quad (5)$$

对于一维层流，式(1)右侧第二项可以简化为

$$\oint_{\Omega} (u \cdot n) dA = \int_{s_1} u_{1x,y} dy - \int_{s_2} u_{2x,y} dy \quad (6)$$

将式(3)代入式(6)并沿裂缝高度积分，得

$$\oint_{\Omega} (u \cdot n) dA = \frac{2}{3} u_{01} w_x - \frac{2}{3} u_{02} \left( w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx \right) \quad (7)$$

对于层流，断面最大流速等于全断面平均流速的2倍<sup>[16]</sup>，即有 $u_{01} = 2\bar{u}_1$ ， $u_{02} = 2\bar{u}_2$ ，而 $\bar{u}_1 = q_x/w_x$ 、

$\bar{u}_2 = \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) / \left( w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx \right)$ ，将其代入式(7)，忽略高阶微量后，得

$$\oint_{\Omega} (u \cdot n) dA = -\frac{4}{3} \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (8)$$

再将式(5)及式(8)代入式(1)，就得到裂缝水流运动质量守恒方程的具体形式，为

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} = \frac{4}{3} \frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (9)$$

式(9)与文献[4~6]中假定裂缝为平行板得到的质量守恒方程在形式上是相同的，但多出4/3系数，说明假定裂缝形状为椭圆形时其体积要稍小于按平行板得到的体积。虽然裂缝按椭圆形状分析较按平行板要合理，但与实际的裂缝形状仍有一定误差。当裂缝长度并不大时，这种误差要小一些。

**2.3 动量守恒** 由于裂缝水流是一维层流，式(2)可以简写为

$$\frac{dM}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \int_V u_{x,y} dV + \rho \oint_{s_1} u_{1x,y}^2 dA - \rho \oint_{s_2} u_{2x,y}^2 dA = \sum F_x \quad (10)$$

按牛顿流体摩擦定律得水流沿边界的摩阻力为

$$\tau = \mu \frac{\partial u_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{16q_x}{w_x^3} y \Big|_{y=\pm \frac{w_x}{2}} \quad (11)$$

式中： $\mu$  为流体的动力粘滞系数。

假定图1控制体左侧x断面的平均水头压力为 $P_x$ ，而右侧 $x+dx$ 断面平均水头压力为 $P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx$ ，因为流速

很小，忽略惯性力作用，同时忽略该段流体的重力作用。则沿x方向的合力为

$$\sum F_x = - \left( P_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{16\mu q_x}{w_x^2} \right) dx \quad (12)$$

将层流断面不同流速、流量之间关系代入式(10)右侧第一项，采用积分中值定律，有

$$\int_V u_{x,y} dV = \frac{4}{3} q_x dx \quad (13)$$

引入动量修正系数 以简化式(10)中的其余两项，有

$$\int_{s_1} u_{1x,y}^2 dA = \beta \bar{u}_1^2 S_1 ; \quad \int_{s_2} u_{2x,y}^2 dA = \beta \bar{u}_2^2 S_2 \quad (14)$$

其中 近似取圆形断面理论计算修正值, 即  $\lambda = 4/3$ 。

将式(12)、式(13)及式(14)代入式(10), 略去高阶微量, 化简得

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{P_x}{w_x} \frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{16\mu q_x}{w_x^3} + \frac{4}{3} \rho \left[ \frac{1}{w_x} \frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{q_x}{w_x^3} \left( 2 \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{q_x}{w_x} \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) \right] \quad (15)$$

根据泊肃叶流动的解<sup>[16]</sup>知, x断面通过的流量为

$$q_x = -\frac{w_x^3}{12\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} \quad (16)$$

将式(16)代入式(15), 结合式(9)进一步简化式(15), 得裂缝水压梯度的微分方程为

$$\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\mu} w_x \frac{\partial w_x}{\partial t} \right) \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{P_x}{w_x} \frac{\partial w_x}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

2.4 缝内水压计算式 由裂缝形态方程式(3)得任一断面裂缝的张开宽度为

$$w_x = 2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = w_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (18)$$

式中:  $w_0$ 为裂缝边缘张开宽度。

由式(18)得

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{w_0}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{\partial w_x}{\partial t} = \dot{w}_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + w_0 \frac{\frac{x^2}{a^3}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \dot{a} \quad (19)$$

式中:  $\dot{w}_0$ 为裂缝边缘张开宽度随时间变化率;  $\dot{a}$ 为裂缝长度扩展率。

将式(19)代入式(17), 得

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{x}{a^2 - x^2} \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\mu} w_0 \dot{w}_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\mu} w_0^2 \dot{a} \frac{x^2}{a^3}} P_x = 0 \quad (20)$$

式(20)即为任意时刻裂缝内水压分布微分方程, 结合边界条件就可以求解。

大量研究表明<sup>[4, 17]</sup>, 岩石与混凝土等脆性材料裂纹断裂失稳扩展具有跳跃性, 裂缝长度并不是持续向前扩展, 而是扩展到某一稳定状态即停止, 待断裂能积聚到一定程度后再出现一次跳跃。若考虑此稳定状

态,则可令 $\dot{w}_0=0$ ,式(20)可以大大化简。再引入边界条件, $P_x|_{x=0}=P_0$ ( $P_0$ 为裂缝边缘水压),经求解可得水力劈裂稳定状态下缝内水压分布理论计算式,为

$$P_x = P_0 \exp\left[\frac{v}{w_0 \dot{w}_0} \left(1 - \frac{a^2}{a^2 - x^2}\right)\right] \quad (21)$$

式中:  $v$  为水的运动粘滞系数,  $\frac{1}{v} = \frac{\rho}{\mu}$ 。

### 3 分析验证

由式(21)可以得到:由于 $\left(1 - \frac{a^2}{a^2 - x^2}\right) \leq 0$ ,由指数函数的性质知裂缝内水压沿裂缝长度按指数规律

减小,随裂缝边缘张开宽度及张开速率的增大,式(21)中的指数部分减小,缝内水压增大;当 $x = a$ 时, $P_x = 0$ ;若令 $w_0 = \dot{w}_0 t$ ,则 $t \rightarrow \infty$ , $P_x \rightarrow P_0$ ,这说明随着时间的推移,缝内水压会逐渐增大到全水头。这些规律与文献[8~10]试验得到的结论完全吻合,说明本文推导出的理论计算式符合实际。下面进一步从定量角度比较分析。

取文献[10]的试验结果,裂缝边缘快速张开,速率为 $200 \mu\text{m/s}$ ,外界水压为 $0.21\text{MPa}$ ,在加压 $4.24\text{s}$ 时裂缝长度为 $140\text{mm}$ ,经推算边缘张开宽度为 $0.848\text{mm}$ 。在此需要说明的是,裂缝边缘张开速率与固体变形相比较快,而与一般水流流速相比仍是较小的,而此时裂缝的长度稳定不变,水流进入裂缝的速率仍很小,符合本文基本假定(4)。文献[10]试验与本文理论计算得到的缝内水压沿长度分布如图2。从图2可以看出,本文的计算结果与试验结果吻合较好。比较其它时段的理论计算结果与试验结果也基本吻合,只是在开始较短时段内,裂尖附近二者差异稍大。延长时间为 $240\text{s}$ ,裂缝内水压分布如图3所示。与图2比较可以得到,裂缝内水压随着时间的延长,水压会逐渐发展为全水头,与文献[5,13,14]结论完全吻合。

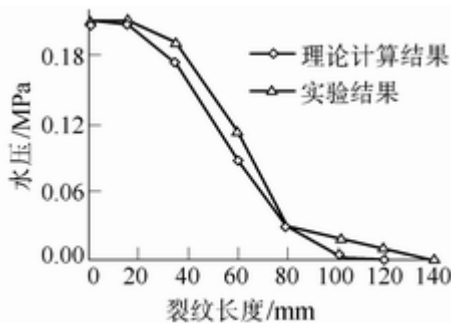


图2 4.24s时裂缝内水压分布

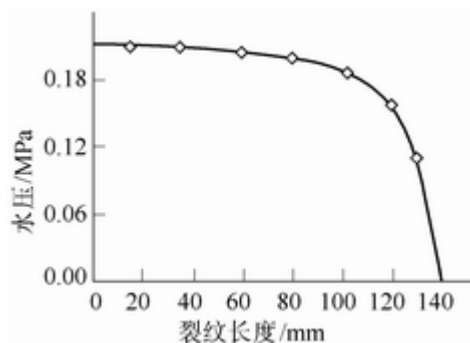


图3 240s时理论计算裂缝内水压分布

当裂缝边缘慢速张开,速率为 $2 \mu\text{m/s}$ 时,计算结果与试验结果差异很大,说明本文提出的理论计算式只适用于裂缝快速张开。分析其原因有:理论公式(21)仅考虑水力劈裂裂缝某一稳定状态时的水压分布,不能充分反映时间效应。因为即使是裂缝扩展长度处于稳定状态,缝内水压未达到全水头前,水流也会缓慢进入裂缝,压力会逐渐增大,这点虽从式(21)的定性分析可以得到,但在具体计算时因难以得到裂缝边

缘张开宽度与速率之间的确切函数关系而难以实现；在相同的时间内，慢速张开裂缝的宽度相对于快速张开时较小，而裂缝愈小，假定的截面流速分布式(4)与实际误差愈大，这也是慢速张开时产生误差的因素；水力劈裂过程是裂隙水流运动与岩体或混凝土固体变形耦合过程，这种耦合作用具体体现在裂缝内水压是固体变形的边界荷载，而裂隙内水压是裂隙张开宽度的函数，裂隙张开宽度却决定于固体的弹塑性变形，加之岩体或混凝土的蠕变效应使这种耦合更为复杂，这说明单从裂缝水流运动角度计算水力劈裂过程中缝内水压分布是有误差的。但本文提出的理论计算式，对于具体水力劈裂某个时刻，尤其是裂纹扩展处于稳定状态时，预测缝内水压分布仍不失其理论价值。

#### 4 结语

本文从流体质量守恒和动量守恒原理出发，假定水力劈裂裂缝形态为半椭圆形，推导出了任意时刻缝内水压分布微分方程式，并得到了裂缝扩展处于稳定状态时缝内水压分布理论计算式。与已有试验结果比较表明，本文的理论计算式反映出的规律性是正确的；在裂缝快速张开时，理论计算结果与试验结果吻合较好，但理论计算式不适用于裂缝慢速张开情况。得到缝内水压分布后，将水压作为外荷载就可以进行结构应力变形分析。

自然界岩体的裂缝形状十分复杂，一般呈三维形态，文中简化为平面半椭圆形，并假定水流为一维层流来推导缝内水压理论计算式，因而即使裂缝是快速张开的，得到的计算结果与实际仍存在一定误差，有待于通过试验或数值模拟来修正。

根据坝体地震荷载分析得到裂缝的张开速率等参数，直接从式(20)出发研究水力劈裂机理将更有价值，这一方面研究作者正在积极进行中。

#### 参考文献：

- [1] 倪才胜. 不衬砌隧洞水力劈裂三维数值模拟[J]. 广东水利水电, 2000, (3): 27-30.
- [2] 黄润秋, 王贤能, 陈龙生. 深埋隧道涌水过程的水力劈裂作用分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(5): 573-576.
- [3] 蔡美峰, 何满潮, 刘东燕. 岩石力学与工程[M]. 北京: 科学出版社, 2002. 141-150.
- [4] 赵阳升. 矿山岩石流体力学[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994. 125-143.
- [5] Papanastasiou P. An efficient algorithm for propagating fluid-driven fractures [J]. Computational Mechanics, 1999, 24(4): 258-267.
- [6] 阳友奎, 肖长富, 邱贤德, 吴刚. 水力劈裂裂缝形态与缝内压力分布[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 1995, 18(3): 20-26.
- [7] 杨秀夫, 陈勉, 刘希圣. 水压裂缝内流场理论研究[J]. 西南石油学院, 2002, 24(1): 87-90.
- [8] Brühwiler E, Saouma V E. Water fracture interaction in concrete—part 1: Fracture properties [J]. ACI Materials Journal, 1995, 92(3): 296-303.
- [9] Brühwiler E, Saouma V E. Water fracture interaction in concrete—part 2: Hydrostatic pressure in cracks [J]. ACI Materials Journal, 1995, 92(4): 383-390.
- [10] Slowik V, Saouma V E. Water pressure in propagating concrete cracks [J]. Journal of Structural Engineering, 2000, 126(2): 235-242.

- [11] Tinawi R, Guizani L. Formulation of hydrodynamic pressure in cracks due to earthquakes in concrete dams [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1994, 23(7): 699-715.
- [12] 黄云, 金峰, 王光纶, 张楚汉. 高拱坝上游坝踵裂缝稳定性及其扩展[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2002, 42(4): 555-559.
- [13] Linsbauer H N, Ingraffea A R. Simulation of cracking in large arch dam. Part 1. [J]. *J. of Structural Engineering*, 1989, 115(7): 1599-1615.
- [14] Linsbauer H N, Ingraffea A R. Simulation of cracking in large arch dam. Part 2. [J]. *J. of Structural Engineering*, 1989, 115(7): 1616-1630.
- [15] Feng L M, Pekau O A, Zhang C H. Cracking analysis of arch dam by 3D boundary element method [J]. *J. of Structural Engineering*, 1996, 122(6): 691-699.
- [16] 章梓雄, 董曾南. 粘性流体力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998. 62-63.
- [17] yepe HOB .脆性断裂力学[M]. 黄克智等译, 北京: 科学出版社, 1990. 286.

### Formula for water pressure distribution in rock or concrete fractures formed by hydraulic fracturing

LI Zong-li<sup>1,2</sup>, REN Qing-wen<sup>2</sup>, WANG Ya-hong<sup>1</sup>

(1. Northwest Sciences and Technology University of Agriculture and Forestry, Yangling 712100, China;

2. Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** On the assumption that the fracture in rock and concrete is in half-ellipse shape the differential equation describing the internal water pressure distribution in rock and concrete fractures formed by hydraulic fracturing is established based on the law of mass conservation and momentum principle. The finite control volume approach is adopted and the formula for calculating the internal pressure at arbitrary moment in the process of fracturing is deduced. The validity of the formula is verified by experimental result.

**Key words:** hydraulic fracturing; internal water pressure distribution; formula; rock and concrete