

# 大型平底浅圆仓贮料侧压力计算方法\*

陈长冰 梁醒培 杨伯源

**【摘要】** 对大直径浅圆仓侧压力的经典计算公式和设计规范公式进行了分析。经与实测值比较表明, Janssen、Reimbert、Airy 理论的计算值偏小, 而现行规范浅仓公式(Rankine 理论)计算结果较实测值偏大。分析、验证了 GB50077—2003 钢筋混凝土筒仓设计规范附录 C 中大直径浅圆仓侧压力公式存在的问题, 并给出修正建议。

**关键词:** 浅圆仓 侧压力 散体力学 工程力学

**中图分类号:** TU249.2; TU312<sup>+</sup>.1

**文献标识码:** A

## 引言

深仓与浅仓有按高径比分类和按破裂面分类等多种方法, 其中最简单、且被广泛应用的为: 当高径比(或高宽比)大于或等于 1.5 时为深仓; 小于 1.5 时为浅仓<sup>[1]</sup>。深仓的静止侧压力有比较成熟的杨森(Janssen)公式<sup>[2]</sup>, 而对于浅仓内散粒物料的压力计算问题不同的学者却存在较大分歧<sup>[3~5]</sup>。

对于深仓, 静态压力杨森公式是其他一些研究的基础<sup>[6~7]</sup>, 即其他研究基本上是在杨森公式的基础上进行修正或某种叠加, 而对于浅仓贮料静态压力的计算却没有像杨森公式那样比较成熟的、被广泛采用的计算公式。况且, 在筒仓内装置诸如筒仓多功能减压管、设置改流体等可以消除卸料时贮料对仓壁及漏斗的动态超压力<sup>[8~9]</sup>。

现在浅圆仓的直径越来越大, 有的达到 60 m, 这实际上成了一种特殊的构筑物——囤, 它的散料侧压力是散装仓设计的重要参数, 其计算正确与否直接关系到仓体结构是否经济合理、安全可靠。对于大型浅圆仓, 由于直径很大, 底部作成平底, 其仓顶一般作成锥形。在仓顶单点装料的条件下, 散料在自然下落的过程中其顶面必然形成锥形。在计算贮料对仓壁的压力时, 应考虑上部锥形贮料产生的超压。

## 1 贮料压力计算的经典理论

### 1.1 Janssen 理论

1895 年, Janssen H A 根据贮料水平微单元体的静力平衡, 推导了贮料压力强度的计算公式, 即著

名的 Janssen 公式。在推导时, 作了如下的基本假设<sup>[2]</sup>: ①贮料处于静止状态。②在筒仓内同一水平面上的各点的竖向压力是相等的。③贮料在任一点处的水平压力  $p$  与垂直压力  $q$  成比例。④不计仓底对贮料压力的影响, 即假定为无限深仓。⑤贮料为均匀密实、不可压缩的散体。

垂直压力为

$$q = \frac{\gamma \rho}{\mu' K} (1 - e^{-\mu' Kh/\rho}) \quad (1)$$

侧压力为

$$p = \frac{\gamma \rho}{\mu'} (1 - e^{-\mu' Kh/\rho}) \quad (2)$$

其中  $K = \tan^2(45^\circ - \phi/2)$   $\mu' = \tan \phi'$   
 式中  $K$ ——Rankine 主动土压力系数<sup>[1,10]</sup>  
 $\phi$ ——贮料内摩擦角  
 $\mu'$ ——贮料与仓壁的摩擦因数  
 $\phi'$ ——贮料外摩擦角  
 $\rho$ ——筒仓的水力半径, 对横截面为圆形的筒仓即为半径的 50%  
 $h$ ——贮料顶面至所计算截面处的距离  
 $\gamma$ ——散体贮料重力密度

### 1.2 Reimbert 方法

Reimbert<sup>[5]</sup>规定浅仓应满足条件为

$$D \geq 2H \tan(45^\circ - \phi/3) \quad (3)$$

式中  $D$ ——筒仓直径  $H$ ——筒仓高

Reimbert 依照 Coulomb 理论的方法, 考虑仓壁后散料滑动体的平衡来建立方程, 但在考虑摩擦时, 认为仓壁对散体的推力与水平面的夹角为内摩擦角, 得出散体的自由面为水平时对仓壁的侧压力为

收稿日期: 2006-03-08

\* 安徽省高校省级自然科学基金项目(项目编号: KJ2007B030)

陈长冰 合肥学院建筑工程系 讲师 博士, 230022 合肥市

梁醒培 河南工业大学土木建筑学院 教授 博士生导师, 450052 郑州市

杨伯源 合肥工业大学土木建筑工程学院 教授 博士生导师, 230009 合肥市

$$p = \gamma h K' \quad (4)$$

根据试验,又把  $K'$  简化为

$$K' = \tan^4(45^\circ - \phi/3) \quad (5)$$

对于仓内散体的顶部为锥形堆料的情况,如果物料休止角为  $\beta$ ,Reimbert 通过试验后建议用平堆所产生的侧压力乘以系数  $(1 + 2\beta/\pi)$  来计算,其中  $\beta$  为弧度,即

$$p = (1 + 2\beta/\pi)\gamma h \tan^4(\pi/4 - \phi/3) \quad (6)$$

### 1.3 Rankine 方法

Rankine 方法<sup>[10]</sup>应用于浅圆仓并不是精确的,对于顶部料面水平的情况,贮料面以下深度  $h$  处的侧压力为

$$p = K\gamma h \quad (7)$$

深度  $h$  处的垂直压力为  $q = \gamma h$ 。

### 1.4 Airy 理论

Airy 关于深仓和浅仓的定义:当破裂面与对面仓壁相交之前已与贮料顶面相交,即为浅仓;当破裂面在贮料顶面以下与对面仓壁相交,则为深仓。1897 年 Airy W<sup>[11]</sup>考虑破裂面以上的贮料楔体的静力平衡,分别导出了浅仓和深仓的贮料压力解析公式。

(1) 对于浅仓,贮料面以下  $h$  处侧压力为

$$p = \gamma h \left[ \frac{1}{\sqrt{\mu(\mu + \mu')} + \sqrt{1 + \mu^2}} \right]^2 \quad (8)$$

(2) 对于深仓,  $h$  处侧压力为

$$p = \frac{\gamma D}{\mu + \mu'} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{2h(\mu + \mu')/D + 1 - \mu\mu'}} \right] \quad (9)$$

式中  $\mu$ ——内摩擦因数,  $\mu = \tan\phi$

垂直压力为  $q = p/K$ 。

上述 4 种方法,只有 Reimbert 浅仓公式考虑了顶面为锥面的情况,但 Reimbert 理论认为外摩擦角与内摩擦角相等,这不一定与实际情况相符。

### 1.5 经典理论计算值与实测结果比较

文献[12~13]对徐州国家粮食储备库的 4、7、8 号粮仓进行了实仓测试:锥体贮料的休止角  $\beta$  为  $23.5^\circ$ ,仓直径  $D = 30$  m,仓高 15 m,贮料为小麦。小麦的重力密度  $\gamma$  为  $7.88$  kN/m<sup>3</sup>,内摩擦角  $\phi$  为  $25^\circ$ ,外摩擦角  $\phi'$  为  $21.8^\circ$ 。图 1a 装粮高度为 8 m,图 1b 装粮高度为 11.4 m。

运用 Janssen 公式和 Rankine 公式计算时,计算高度  $h$  取贮料锥顶重心至所计算截面处的距离;Reimbert 公式和 Airy 公式,  $h$  则取贮料顶面与仓壁相交处至所计算截面处的距离。

## 2 国家规范的浅圆仓计算公式

对于浅仓贮料压力的计算以往是采用挡土墙的

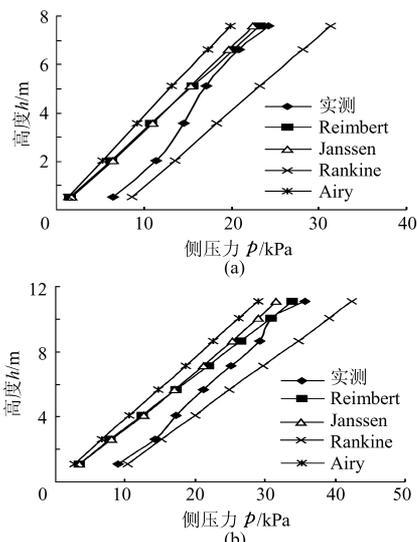


图 1 浅圆仓侧压力理论计算结果与实测分布比较  
(a) 8 m (b) 11.4 m

主动土压力公式,即 Rankine 主动土压力公式<sup>[1]</sup>。因 Rankine 土压力公式只适用于墙体无限长、墙背直立、光滑、墙后填土是水平的平面挡墙<sup>[8]</sup>,这种平面挡墙的曲率是无穷大的,在小型浅仓设计时尤其矩形浅仓基本可以符合或满足要求。但大型浅圆仓采用这种计算方法就与实际受力条件不符,比实际值偏大,因为浅圆仓或圆形筒仓的仓壁是圆柱曲面,其曲率半径是有限的。

基于上述原因,在国家标准<sup>[1]</sup>中增加了浅圆仓贮料压力计算公式(附录 C)内容。文献[13~16]阐述了这些公式的理论依据,本文将对这些公式的应用加以说明。

规范<sup>[1]</sup>中 4.2.6 款第 5 条规定:  $h \leq 0.5D$ ,  $D \geq 24$  m 的大型浅圆仓仓壁上的水平侧压力  $p$  的计算应计入仓壁顶面以上的堆料的作用,可按附录 C:浅圆仓贮料压力计算。

### 2.1 工况 1

当仓壁顶面以上的贮料为锥体,破裂面通过仓的中线如图 2a 时,贮料作用于浅圆仓仓壁上的侧压力为

$$E = \gamma h^2 \lambda_{k1} / 2 \quad (10)$$

$$p = \lambda_{k1} \gamma h \quad (11)$$

其中  $\lambda_{k1} = \frac{1}{12\delta^2} (6\delta + \tan\beta - \cot\theta) \cot(\theta + \phi)$  (12)

$$\cot\theta = -\cot\phi + \frac{\sqrt{2[1 + \cos 2\phi + \sin 2\phi(\tan\beta + 6\delta)]}}{\sin 2\phi} \quad (13)$$

$$\delta = h/D \quad (14)$$

式中  $E$ ——仓壁总侧压力

$\lambda_{k1}$ ——贮料作用于仓壁的侧压力系数

$\theta$ ——贮料的破裂角

$\delta$ ——浅圆仓的高径比

式(10)~(14)即规范 GB50077—2003<sup>[1]</sup>附录 C 中的公式(C.0.1-1)~(C.0.1-5)。

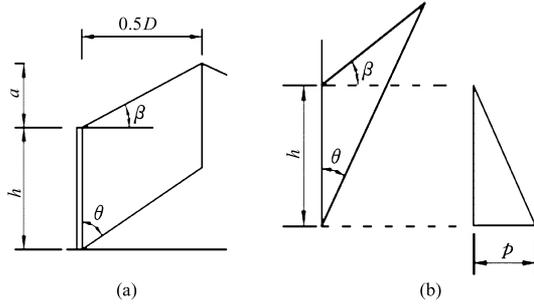


图2 仓壁顶面以上的贮料为锥体的破裂面示意图

(a) 工况1 (b) 工况2

## 2.2 工况2

当仓壁顶面以上的贮料为锥体,破裂面不通过仓中线(如图2b)时,贮料作用于浅圆仓仓壁上的侧压力为

$$E = \frac{1}{2} \gamma h^2 \lambda_{k3} \eta_2 \quad (15)$$

$$p = \gamma h \lambda_{k3} \eta_2 \quad (16)$$

其中 
$$\lambda_{k3} = \frac{\cos^2 \phi}{[1 + \sqrt{\sin(\phi - \beta) \sin \phi / \cos \beta}]^2} \quad (17)$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{1}{3} (2\delta + \tan \beta) \tan \theta \quad (\theta \leq \theta_0) \quad (18)$$

$$\cot \theta_0 = 2\delta + \tan \beta \quad (19)$$

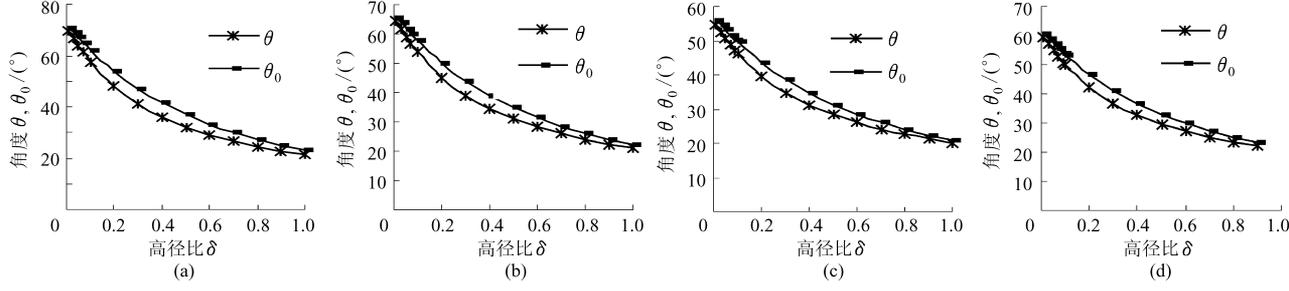


图3 按式(13)、(19)计算的破裂角

(a)  $\phi = 20^\circ, \beta = 18^\circ$  (b)  $\phi = 25^\circ, \beta = 23.5^\circ$  (c)  $\phi = 30^\circ, \beta = 28.5^\circ$  (d)  $\phi = 35^\circ, \beta = 33^\circ$

仓( $0 < \delta < 1$ )贮料破裂面不与仓中心轴线相交,即不会出现第1种工况。

### 2.3.2 工况2计算公式分析及与实测值比较

由以上分析知,工况1不会出现,大直径浅圆仓可以直接应用工况2的公式计算侧压力。但工况2的公式也须补充,在规范附录C中只说明当按式(20)计算出的 $\theta$ 满足 $\theta \leq \theta_0$ ,则按式(18)计算修正系数 $\eta_2$ 。而实际计算时往往会出现 $\theta \geq \theta_0$ 的情况,按文献[13]的理解,当 $\theta \geq \theta_0$ ,则取 $\theta = \theta_0$ 仍按式(18)计算修正系数 $\eta_2$ 。其实将 $\theta_0$ 代入式(18)后, $\eta_2 = 2/3$ 。即当 $\theta \geq \theta_0$ 时, $\eta_2 = 2/3$ 。

式(20)是库仑公式按总侧压力 $E$ 对破裂角 $\theta$ 求导, $E$ 取最大值时,由 $dE/d\theta = 0$ 得出;其实也可

$$\tan(\theta + \beta) = -\tan \phi + \sqrt{(\tan \phi + \cot \phi)(\tan \phi + \tan \beta)} \quad (20)$$

$$\phi = \phi - \beta \quad (\phi \neq \beta) \quad (21)$$

式中  $\theta_0$ ——破裂面交于仓顶锥体贮料锥顶时的破裂角(临界破裂角)

$\eta_2$ ——修正系数

式(15)~(21)即规范 GB50077—2003 附录 C 中的公式(C.0.3-1)~(C.0.3-8)。

## 2.3 分析与验证

### 2.3.1 工况1的验证

应用规范附录C中公式计算大直径浅圆仓侧压力比较麻烦,首先不知道先用哪一个公式,规范没有特别说明。按文献[13]方法必须先假设为工况1,由式(13)计算出破裂角 $\theta$ ,再按式(19)计算出临界破裂角 $\theta_0$ ,如果 $\theta > \theta_0$ 则按工况1的式(10)~(14)计算侧压力,否则按工况2计算。

由规范附录B知,粮食贮料内摩擦角 $\phi$ 在 $20^\circ \sim 35^\circ$ 之间,散体的休止角 $\beta$ 小于等于内摩擦角 $\phi$ ,选粮食为贮料来验证公式规范附录C所假设的工况1是否存在。

图3中给出了按式(13)计算出的破裂角 $\theta$ 和按式(19)计算出的临界破裂角 $\theta_0$ ,对于粮食浅圆仓总有 $\theta < \theta_0$ ,对于其他贮料内摩擦角在 $20^\circ \sim 50^\circ$ 之间,即使取 $0 \leq \beta \leq \phi$ ,同样也总有 $\theta < \theta_0$ 。所以对于浅圆

以对破裂角的正切值 $\tan \theta$ 求导,由 $dE/d(\tan \theta) = 0$ 得出,即

$$\tan \theta = \frac{\xi \cos \beta - \sin \phi}{\xi \sin \beta + \cos \phi} \quad (22)$$

其中 
$$\xi = \sqrt{\frac{\sin \phi}{\cos \beta \sin(\phi - \beta)}} \quad (23)$$

可以验证式(22)、(23)与规范附录C中(C.0.3-1)式、(C.0.3-2)式完全等价,但式(22)、(23)要简洁得多。

现按工况2的公式计算文献[12~13]的2个锥堆实例。由式(20)或式(22)计算出破裂角 $\theta = 53.02^\circ$ ,装粮高度为8 m和11.4 m时,按式(19)算出的 $\theta_0$ 分别为 $33.66^\circ$ 和 $27.09^\circ$ ,均比破裂角 $\theta$ 小,

故2种情况的修正系数都取 $\eta_2 = 2/3$ 。再分别按式(16)计算出侧压力,计算结果如图4。

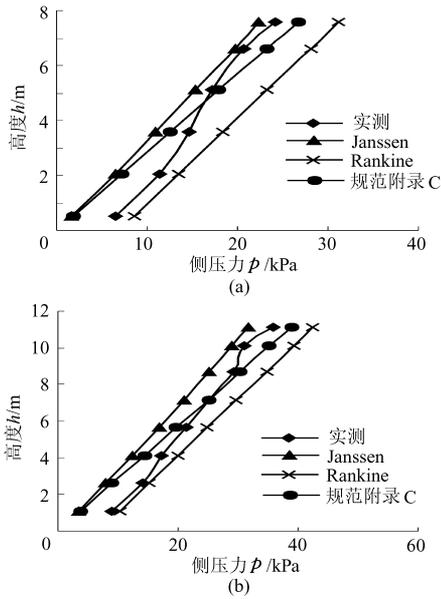


图4 规范附录C公式计算结果与实测值比较  
(a) 8 m (b) 11.4 m

由图4看出,按附录C工况2的侧压力公式计算结果与实测值符合得比较好。因此对于高径比 $h/D \leq 0.5$ 时,按附录C工况2的侧压力公式计算结果较满意。进一步计算可发现,当 $0.5 < h/D < 1$ 时,按附录C的计算结果与规范浅仓公式(即Rankine公式)计算结果基本一致。

### 3 结束语

对于大型平底浅圆仓,散料堆高可能较高,但仍属于浅仓范围( $h/D < 1.5$ ),此时,Rankine公式计算结果偏大,而Airy、Reimbert和Janssen公式的计算结果则偏小。

为便于设计应用,基于本文分析结果,规范附录C的计算公式可做如下修改:①第1种工况不会出现,建议删除。②第2种工况(对应规范C.0.3-1)破裂角建议采用本文式(22),其计算比较简洁。③第2种工况(对应规范C.0.3-5)应加上一条,即当 $\theta \geq \theta_0$ 时,取修正系数 $\eta_2 = 2/3$ 。

### 参 考 文 献

- 1 GB50077—2003 钢筋混凝土筒仓设计规范[S].
- 2 Janssen H A. Versuche uber getreidedruck in silozellen (experiments about pressure of grain in silos)[M]. VDI Zeitschrift (Düsseldorf), 1895.
- 3 Jenike A W, Johanson J R. On the theory of bin loads[C]. ASME Paper 1. No. 68-MH-8. 1968.
- 4 Johanson J R, Colijn H. New design criteria for hoppers and bins[J]. Iron & Steel Engineer, 1964, 21(10): 85~104.
- 5 Reimbert M, Reimbert A. Pressure and overpressure vertical and horizontal silos[C]. International Conference on Design of Silos for Strength and Flow. Powder Advisory Cent London, England, 1980.
- 6 郝培业. 深仓散体静压力理论研究[J]. 农业机械学报, 1993, 24(1): 68~72.
- 7 郝培业. 大高径比筒仓卸料动压力近似计算[J]. 农业机械学报, 1994, 25(3): 45~49.
- 8 余平, 毛广卿, 赵冰冰. 粮食筒仓多功能减压管的研究[J]. 郑州粮食学院学报, 1995, 16(3): 52~59.
- 9 Yang Shie-Chen, Hsiao Shu-San. The simulation and experimental study of granular materials discharged from a silo with the placement of inserts[J]. Powder Technology, 2001, 120(3): 244~255.
- 10 Rankine W J M. On the stability of loose earth[J]. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., 1857(1): 7~9.
- 11 Airy W. The pressure of grain minutes of proceedings[J]. Institution of Civil Engineers. London, 1897, 131(1): 347~358.
- 12 李兴照. 大直径粮食浅圆仓仓壁压力的测试与分析[D]. 郑州: 郑州工程学院, 2002.
- 13 原方. 曲线挡墙内侧散粒体压力分析及工程应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2004.
- 14 原方, 邵兴, 崔元瑞. 大直径浅圆仓贮料侧压力实用计算方法[J]. 特种结构, 2003, 20(2): 16~19.
- 15 原方, 范量, 邵兴. 大直径浅圆仓贮料侧压力计算公式探讨[J]. 隧道建设, 2004, 24(1): 17~19.
- 16 原方, 邵兴, 崔元瑞. 一种新的浅圆仓散料侧压力计算方法[J]. 工程力学, 2004, 21(3): 96~100.