模糊先验信息下 Bayes 可靠性评估方法*

赵 韩 方良海

【摘要】 在 Bayes 可靠性评估中通常需要利用专家经验等先验信息，而可靠性工程专家习惯于将自己的意见用模糊信息来表达。普通 Bayes 分析方法不易处理这些模糊先验信息，针对这种情况提出了一种 Bayes 可靠性评估方法：首先基于试验数据诱导出可靠性参数的置信分布，并将该分布视为“先验分布”，将专家意见视为模糊观测数据，再根据 Bayes 公式进行统计推断。

关键词：模糊先验信息 Bayes 方法 可靠性评估

中图分类号：TB114.3 **文献标识码**：A

New Bayesian Reliability Estimation Method Making Use of Fuzzy Prior Information

Zhao Han Fang Genhai
(*Hefei University of Technology*)

Abstract

Prior information such as expert judgment is needed in Bayesian reliability estimation. General Bayesian method cannot deal with expert judgment when it is fuzzy. Under this circumstance, a new method was proposed. First a belief distribution was deduced from test data, and it was regarded as prior distribution. Then the expert judgment was taken as fuzzy observation, and reliability parameters were obtained *via* Bayesian theorem.

Key words Fuzzy prior information, Bayesian method, Reliability estimation

引言

在可靠性分析和评估中，Bayes 方法已得到了广泛应用。特别是在试验数据较少的情况下，运用 Bayes 方法，能充分利用各种定量或定性的先验信息，以弥补现场试验数据的不足，从而解决经典方法所不能解决的许多问题。先验信息大致可分为主观信息和客观信息两大类。主观信息指的是可靠性专家在长期工程实践中积累起来的经验信息，而客观信息指的是先前的一些与该产品相关的试验信息，如仿真信息、相似产品试验信息等。对于某些大型复杂系统来说，由于条件、经费等因素的限制，客观信息难以获取或者获取的成本很高，此时专家意见等主观信息在其可靠性评估过程中就扮演了很重要的角色。专家提供的经验信息在表现形式上是多种多样的，如：点估计值、众数、分位数、一二阶矩等。然而在很多时候，专家由于自身的局限性，很难给出一个确切的可靠性特征量的估计值。人们常常习惯于用模糊语言如“该产品可靠度大约为 0.98”、“失效率很高”等来定性地描述事物，而不是用精确的值，如“该设备发生故障的概率是 0.9”、“该汽车的寿命剩余 50%”等定量地描述。这一方面是由于用语言描述比用精确的数值描述方便得多，另一方面原因是后者比前者要承担更大的风险。

通常，Bayes 方法利用专家意见等先验信息的途径是将其用一个先验分布来描述，即根据先验信息按一定的方法来构造先验分布。例如，当专家意见为点估计值、置信区间等形式时，可采用最大熵方法来确定先验分布。然而，当专家提供的是模糊信息时，难以用有效的方法来构造先验分布。为了充分有

收稿日期：2005-10-25
* “十五”国家科技攻关计划资助项目(项目编号：2005BA201A83-01)
赵 韩 合肥工业大学安徽省数字化设计与制造重点实验室 教授 博士生导师，230009 合肥市
方良海 合肥工业大学机械与汽车工程学院 博士生

效地利用这些模糊先验信息,同时避免由模糊信息构造先验分布的难题,本文提出一种 Bayes 可靠性评估的新思路。

1 Bayes 可靠性评估的基本思想

Bayes 可靠性评估是一种基于 Bayes 定理的可靠性参数统计推断方法,它强调使用专家经验等先验信息以便很好地解决常规可靠性方法解决不了的小样本事件或无失效数据的可靠性评估问题。Bayes 方法有别于经典方法的重要特征在于其将未知可靠性参数视为随机变量,Bayes 公式密度函数形式为

$$p(\theta|x)=\frac{p(\theta)p(x|\theta)}{\int_{\Theta}p(\theta)p(x|\theta)\mathrm{d}\theta} \tag{1}$$

其中,$p(\theta)$是在试验之前就已知的,为参数 θ 的先验密度函数,称之为先验分布;$p(x|\theta)$为条件密度函数,也称为似然函数;$p(\theta|x)$表示样本给定下 θ 的条件分布称为 θ 的后验分布,它综合了 θ 的先验信息和样本带来的关于 θ 的新信息,前者蕴含在先验分布 $p(\theta)$中,后者蕴含在 $p(x|\theta)$中。

Bayes 方法的基本思想是通过演绎性的推理过程,用样本信息修正先验信息,然后进行统计推断[1]。在 Bayes 可靠性评估过程中,首先将专家经验等可靠性信息当作先验信息并用先验分布来描述,再通过试验数据将先验分布更新为后验分布,后验分布是 Bayes 学派进行统计推断的基础,利用后验分布可以对未知参数进行统计推断,如点估计、区间估计等。Bayes 方法能有效地综合先验信息和样本信息,既可避免只使用先验信息可能带来的主观偏见和缺乏样本信息时的大量盲目搜索与计算,也可避免只使用样本信息带来的噪声影响[2]。

2 Bayes 可靠性评估中模糊先验信息的利用

2.1 Bayes 分析的新思路

由上述介绍可以看出,Bayes 可靠性评估的一般思路是“先验信息+试验数据→后验分布”。试验数据信息和先验信息分别独自地提供关于可靠性参数的信息,虽然它们反映的信息量大小有异,但地位应是对等的。基于这种思想,文献[3]提出了一种 Bayes 分析的新思路:将试验数据视为“先验信息”,而将专家经验等先验信息视为“试验数据”,再利用 Bayes 公式进行统计推断。这种作法的好处是避免了在某些场合下由先验信息构造先验分布的困难,它提供了一条利用先验信息的新途径。该方法的基本步骤如下:①基于试验数据诱导出可靠性参数 R 的置信分布 $p_b(R)$,并将此置信分布作为参数的“先验分布”。②将先验信息通过适当的途径等效为一组“试验数据”。③依据上述获取的“先验分布”和“试验数据”采用通常的 Bayes 方法进行可靠性统计推断。

该方法在实际操作中的一个重要步骤是将实际获得的试验数据根据置信限理论诱导出 R 的一个分布(称为置信分布)。记由数据 X 用经典统计的置信区间理论获得的 R 的下限(置信度为 γ)为 $R_L(x;\gamma)$,满足

$$P(R\geqslant R_L(x;\gamma))=\gamma \tag{2}$$

当 x 给定时,$R_L(x;\gamma)$随 γ 的变动可生成 R 的概率分布。记其密度为 $f(R)$,称为置信分布。同样,置信上限也可以诱导出 R 的置信分布。对一般连续型变量 X,由置信下限和置信上限诱导出的置信分布是相同的,而对于离散型变量 X,基于上限和下限诱导出的置信分布一般稍有不同。例如,对可靠度为 R 的成败型试验数据(n,s)(n 表示试验次数,s 表示成功次数),R 的置信度为 γ 的下限 R_L 确定为

$$\sum_{i=0}^{n-s}\binom{n}{i}R_L^{n-i}(1-R_L)^i=1-\gamma \tag{3}$$

或表示为 $$I_{R_L}(s,n-s+1)=1-\gamma \tag{4}$$

记 $$F(R)=I_R(s,n-s+1) \tag{5}$$

显然有 $$F(R_L)=1-\gamma \tag{6}$$

即对于不同的置信度 γ 和与之相对应的下限 R_L,上式都成立。根据定义可以看出,$F(R)$即为可靠度 R 的下限置信分布函数,而 R 的下限置信密度为

$$f(R)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}F(R)=Be(R;s,n-s+1) \tag{7}$$

即为 R 的一个置信分布。同理,利用置信上限可得 R 的另一个置信分布 $Be(R;s+1,n-s)$。折中考虑,在成败型试验数据场合可取产品可靠度 R 的置信分布为

$$p_b(R)=Be(R;s+0.5,n-s+0.5) \tag{8}$$

将上述置信分布视为 R 的先验分布 $p(R)$。

如果在获取上述试验数据之前,可靠性工程专家对产品的可靠度有一定的先验知识,比如知道一二阶矩、分位点、众数等。这些信息在工程实际中大都可用贝塔分布较好地描述,确定此分布后,就可将之等效成一组成败型试验数据(n',s'),n'是样本量,s'是成功数。此时,根据先验分布 $p(R)$和等效的试验数据(n',s')进行 Bayes 分析得到后验分布

$$p(R|(n',s'))=\frac{p(R)p((n',s')|R)}{\int_{\Theta}p(R)p((n',s')|R)\mathrm{d}R}=$$

$$\frac{p_b(R)\binom{n'}{n'-s'}R^{n'}(1-R)^{n'-s'}}{\int_0^1 p_b(R)\binom{n'}{n'-s'}R^{n'}(1-R)^{n'-s'}\mathrm{d}R} \tag{9}$$

最后根据此后验分布进行统计推断得出可靠度 R 的点估计值或区间估计值等。

2.2　模糊先验信息时的 Bayes 可靠性评估

在常规 Bayes 方法中，需将其用一个分布函数来描述，在本文介绍的新的 Bayes 策略中，需将其等效为“试验数据”。这两种利用模糊专家意见的途径在操作上都存在一定的难度。

在模糊理论中，这些模糊专家意见可用模糊数来方便地描述。Thomas 在文献[4]中指出 Bayes 过程可以应用在模糊观测 $\tilde{A}$ 情形下，即

$$p(x|\tilde{A})=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)p(x)}{P(\tilde{A})} \tag{10}$$

式中隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 被看作似然函数，$P(\tilde{A})=\int\mu_{\tilde{A}}\mathrm{d}P(x)$ 为模糊事件的 Zadeh 概率。此处，已经根据试验数据诱导出了一个置信分布 $p_b(R)$ 作为“先验分布”，若专家意见用模糊数 $\tilde{R}$ 表示，将其视为模糊观测数据，则后验分布表示为

$$p(R|\tilde{R})=\frac{\mu_{\tilde{R}}(R)p_b(R)}{P(\tilde{R})} \tag{11}$$

其中　$P(\tilde{R})=\int_0^1\mu_{\tilde{R}}(R)p_b(R)\mathrm{d}R$

3　数值例

某成败型产品的试验数据 $(n,s)=(50,49)$，专家给出的先验信息为“可靠度 R 大约为 0.95”，用上述方法进行 Bayes 可靠性分析的步骤如下：根据前述分析，取该成败型产品的可靠度 R 的置信分布为 $Be(R;s+0.5,n-s+0.5)$，并将此置信分布视为“先验分布”，即

$$p_b(R)=Be(R;49.5,1.5)=\frac{\Gamma(51)}{\Gamma(49.5)\Gamma(1.5)}R^{48.5}(1-R)^{0.5}$$

根据相关专家的意见，模糊先验信息“可靠度 R 大约为 0.95”用三角模糊数 $\mu_{\tilde{R}}(R)=(0.9,0.95,1)$ 来表示，即

$$\mu_{\tilde{R}}(R)=\begin{cases}0 & (R<0.9)\\ \dfrac{R-0.9}{0.95-0.9} & (0.9\leqslant R<0.95)\\ \dfrac{1-R}{1-0.95} & (0.95\leqslant R\leqslant 1)\\ 0 & (R>1)\end{cases}$$

则有　$$P(\tilde{R})=\int_0^1\mu_{\tilde{R}}(R)p_b(R)\mathrm{d}R=\int_0^1\mu_{\tilde{R}}(R)Be(R;49.5,1.5)\mathrm{d}R$$

根据 Bayes 公式计算得到后验分布

$$p(R|\tilde{R})=\frac{\mu_{\tilde{R}}(R)p_b(R)}{P(\tilde{R})}=\frac{\mu_{\tilde{R}}(R)Be(R;49.5,1.5)}{\int_0^1\mu_{\tilde{R}}(R)Be(R;49.5,1.5)\mathrm{d}R}=$$

$$\begin{cases}0 & (R<0.9)\\ 17\,397(R^{49.5}-0.9R^{48.5})(1-R)^{0.5} & (0.9\leqslant R<0.95)\\ 17\,397(R^{48.5}-R^{49.5})(1-R)^{0.5} & (0.95\leqslant R\leqslant 1)\\ 0 & (R>1)\end{cases}$$

根据后验分布得到该产品的 Bayes 点估计值为

$$\hat{R}=\int_0^1 Rp(R|\tilde{R})\mathrm{d}R=0.963\,7$$

4　结束语

Bayes 可靠性评估方法的生命力在于它能够充分利用各种相关可靠性信息，包括先验信息和试验信息、精确信息和模糊信息。在样本数据缺乏的情况下，专家意见是一类非常重要的可靠性信息，需要引起重视。由于专家经验信息的模糊性特点，模糊专家意见在 Bayes 可靠性评估中的利用问题是一个值得研究的课题。本文针对模糊先验信息情形下的 Bayes 可靠性评估问题，提出了一种新的利用模糊先验信息的途径。该方法回避了从模糊先验信息构造先验分布的困难，有效地综合了先验信息和试验数据，得出了可信的评估结果。

参　考　文　献

1　马智博，朱建士，徐乃新．基于主观推断的可靠性评估方法[J]．核科学与工程，2003，23(2)：127～131．

2　林士敏，王双成，陆玉昌．Bayesian 方法的计算学习机制和问题求解[J]．清华大学学报：自然科学版，2000，40(9)：61～64．

3　赵勇辉．可靠性评定的若干问题研究[D]．北京：中国科学院，2001．

4　Thomas S F．Possibilistic uncertainty and statistical inference[C]//ORSA/TIMS Meeting，Houston，Texas，USA，1981．

5　Didier Dubois，Serafin Moral，Henri Prade．A semantics for possibility theory based on likelihoods[J]．Journal of Mathematical Analysis and Applications，1997，205(2)：359～380．

6　刘普寅，吴孟达．模糊理论及其应用[M]．长沙：国防科学技术大学出版社，1998．

7　周源泉，翁朝曦．可靠性评定[M]．北京：科学出版社，1990．