

# 基于快速投影LANDWEBER法的电容层析成像 图像重建算法研究

董向元<sup>1</sup>, 陈琪<sup>2</sup>, 李惊涛<sup>1</sup>, 蔡斌<sup>3</sup>, 阎润生<sup>1</sup>, 王海刚<sup>1</sup>, 刘石<sup>1</sup>

(1.中国科学院工程热物理研究所,北京市 海淀区 100080; 2.北京交通大学机电学院,北京市 海淀区 00044;  
3.重庆大学数理学院,重庆市 沙坪坝区 400044)

## A FAST PROJECTED-LANDWEBER METHOD FOR IMAGE RECONSTRUCTION FOR ECT

DONG Xiang-yuan<sup>1</sup>, CHEN Qi<sup>2</sup>, LI Jing-tao<sup>1</sup>, CAI Bin<sup>3</sup>, YAN Run-sheng<sup>1</sup>, WANG Hai-gang<sup>1</sup>, LIU Shi<sup>1</sup>

Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Haidian District, Beijing 100080, China;

2. Beijing Jiaotong University, Haidian District, Beijing 100044, China;

3. Chongqing University, Shapingba District, Chongqing 400044, China)

**ABSTRACT:** A novel fast projected-Landweber algorithm for electrical capacitance tomography is presented. The first part of the scheme uses the preconditioning matrix to accelerate the iterative process, and the second part maintains the algorithm stable by projected-Landweber algorithm. The preconditioning matrix is calculated by an iterative algorithm for generalized inverse, and an optimized step length function is incorporated into the prior-iterative scheme. The convergence condition for ECT problems is also discussed. It shows that it is easy to meet the convergence condition and convenient to choose the parameters of the preconditioning matrix. Experimental results and simulation data indicate that the algorithm can provide high quality images with less reconstruction time compared with LBP、OIOR and projected-Landweber algorithms.

**KEY WORDS:** Thermal power engineering; Image reconstruction; Projected-Landweber algorithm; Electrical Capacitance tomography; Iterative algorithm; Generalized inverse

**摘要:** 提出一种新的基于快速投影 Landweber 法的 ECT 图像重建算法。算法采用两部分迭代, 初期采用预置矩阵加速迭代, 该矩阵通过优化步长广义逆迭代得到; 后期采用常规投影 Landweber 法稳定迭代。探讨了 ECT 应用该算法的

收敛条件, 该算法易满足收敛条件且预置矩阵参数选取简单。仿真和实验结果表明, 与 LBP、OIOR、投影 Landweber 算法相比, 该算法兼备收敛稳定性好及收敛速度快等优点。

**关键词:** 热能动力工程; 图像重建; 投影 Landweber 法; 电容层析成像; 迭代算法; 广义逆

## 1 引言

电容层析成像(Electrical Capacitance Tomography, ECT)是应用于多相流浓度测量的一种新型技术, 其原理是依靠围绕被测区域的一组电极板来检测区域内物质浓度分布变化而引起的电容变化, 籍以确定内部物质浓度分布。因其具有不干扰流场、快速、廉价、无放射性等优点, 近年来广泛应用于气/油、水/油、特别是气/固两相流动测量<sup>[1-4]</sup>。

ECT 测量的成功应用很大程度上依赖于成像算法的精度与速度。且由于其敏感场的非线性和软场特性影响, 使得 ECT 的图像重建困难得多。目前, 用于 ECT 图像重建的较常用的方法主要有: 线性反投影算法(LBP)<sup>[5]</sup>、正则法<sup>[6]</sup>、优化步长的 Landweber 迭代法<sup>[7]</sup>以及投影 Landweber 迭代法<sup>[8]</sup>等。线性反投影法的特点是算法简单, 重建速度快。但因其成像质量相对较差, 严格说来, 该算法仅是一种定性算法。正则法因其正则参数的选取对成像质量影响较大, 一般采用经验值, 因此具有很大局限性。但特别值得一提的是, 在 Landweber 迭代法基础上发

基金项目: 国家自然科学基金项目(50276062)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50276062).

展起来的在线预选代法(OIOR)<sup>[9]</sup>,在与LBP相同的速度下,得到与多次Landweber迭代一样的成像质量,但空间分辨率仍然没有超过Landweber方法。而投影Landweber迭代法可明显改善迭代的稳定性及有效地控制噪音,但对于复杂流型通常需要大量迭代才能达到满意的效果,限制了其应用。

本文提出了一种基于广义逆预选代的快速投影Landweber迭代法,可大大加快投影Landweber法收敛速度,同时给出了几种算法仿真与静态实验比较结果。

## 2 算法原理

线性反投影法(LBP)是将物质分布与测量电容的复杂非线性关系线性化来求近似解。ECT中电容与物质分布的线性关系可被简化为<sup>[5]</sup>

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{G} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^I$ ,  $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^J$ ,  $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{I \times J}$ 。其中, $I$ 为可测得的独立电容数目, $J$ 为成像区域内像素个数。由于 $\mathbf{S}$ 反映了电容 $\mathbf{C}$ 受物质分布 $\mathbf{G}$ 变化的影响,它被称为敏感场。

线性反投影法用 $\mathbf{S}^T$ 求得 $\mathbf{G}$ 的近似解

$$\mathbf{G} = \mathbf{S}^T \mathbf{C} \quad (2)$$

即可实现图像重建。

投影Landweber迭代法(PL法)是近年来应用最广泛的方法,表达式为

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{f}(\mathbf{G}_{k-1} + \mathbf{a}\mathbf{S}^T(\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{G}_{k-1})) \quad (3)$$

其中, $\mathbf{G}$ 的初值由LBP法给定。因投影Landweber法收敛速度较慢,影响了其应用。因此,国外学者对其进行了改进,以加快其收敛速度。M. Piana等<sup>[10]</sup>提出了快速的投影Landweber法:

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{f}(\mathbf{G}_{k-1} + \mathbf{a}\mathbf{D}\mathbf{S}^T(\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{G}_{k-1})) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{D}$ 为预置矩阵并提出了两种取法。一种采用Sanz and Huang的正则化方法

$$\mathbf{D}\mathbf{S}^T = (\mathbf{S}^T\mathbf{S} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^T \quad (5)$$

其中,正则参数 $\mathbf{I}$ 的选择十分重要,过大和过小的 $\mathbf{I}$ 都会使图象失真,目前 $\mathbf{I}$ 多凭经验选取。

另一种方法是

$$\mathbf{D}\mathbf{S}^T = \mathbf{a}_0(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{a}_0\mathbf{S}^T\mathbf{S}) + \dots + (\mathbf{I} - \mathbf{a}_0\mathbf{S}^T\mathbf{S})^{N-1})\mathbf{S}^T \quad (6)$$

其中,事先要同时确定两个参数 $\mathbf{a}_0$ 、 $N$ 。

无论是式(3)中的 $\mathbf{S}^T$ ,还是式(5)、(6)中的 $\mathbf{D}\mathbf{S}^T$ 都可认为是广义逆 $\mathbf{S}^+$ 的近似,文献[7]中提出的预选代法实际上是一种变步长求广义逆的方法(OIOR法)

$$\begin{cases} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{a}_{k-1}\mathbf{S}^T(\mathbf{I} - \mathbf{S}\mathbf{A}_{k-1}), (k=1, \dots, N) \\ \mathbf{a}_{k-1} = \frac{\|\mathbf{S}^T e_{k-1}\|^2}{\|\mathbf{S}\mathbf{S}^T e_{k-1}\|^2} \\ e_{k-1} = \mathbf{C}_0 - \mathbf{S}\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{C}_0 \\ \mathbf{G} = \mathbf{A}_N\mathbf{C} \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{C}_0$ 可采用不同物质分布下的电容值,本文采用满管归一化电容值,即元素全为一的向量。根据递推法易证明式(8)等价于式(7)。

$$\begin{cases} \mathbf{D}_k = \mathbf{D}_{k-1} + \mathbf{a}_{k-1}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{D}_{k-1}), (k=1, \dots, N) \\ \mathbf{A}_N = \mathbf{D}_N\mathbf{S}^T \end{cases} \quad (8)$$

由式(8)可知, $\mathbf{D}_N$ 为 $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ 的函数,符合strand<sup>[11]</sup>提出的条件。为了减少计算量,本文依然采用式(7)的形式。由式(7)可知,预选代时,由于采用了自适应步长,预先只需要确定一个参数:迭代步数 $N$ 。则式(4)变为

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{f}(\mathbf{G}_{k-1} + \mathbf{a}\mathbf{A}_N(\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{G}_{k-1})) \quad (9)$$

收敛条件应满足<sup>[11]</sup>

$$\|\mathbf{a}\mathbf{A}_N\mathbf{S}\|_2 < 2 \quad (10)$$

$\mathbf{A}_N$ 由式(7)事先确定,图像重建时只需几到几十步迭代即可,为了避免选取预置矩阵有可能产生的过迭代现象,对迭代过程改造为

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{f}(\mathbf{G}_{k-1} + \mathbf{a}\mathbf{A}_N(\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{G}_{k-1})), k=1, \dots, m \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{f}(\mathbf{G}_{k-1} + \mathbf{a}\mathbf{S}^T(\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{G}_{k-1})), k=m, \dots, M \quad (12)$$

通常 $m$ 选取 $M/2$ 或 $M/3$ 即可,也可根据需要调整,将此算法称为基于广义逆预选代的快速投影Landweber迭代法,简称为GIAPL法。此算法在前 $m$ 步起加速迭代作用, $m$ 步以后为稳定迭代过程。

## 3 仿真与实验结果

先来探讨一下公式(10)中 $\mathbf{a}$ 和 $N$ 的取值。对于成像所采用的敏感场均为归一化后的为无量纲量。图1给出了方形传感器 $32 \times 32$ 网格 $\mathbf{b} = \|\mathbf{A}_N\mathbf{S}\|_2$ 与迭代步数 $N$ 的关系曲线,图2为预置矩阵 $\mathbf{D}_N$ 的条件数 $t$ 与迭代次数 $N$ 的关系曲线。

由图1可知,迭代60步后最大特征值 $\mathbf{b}$ 值上升趋势减缓,350步后趋于平缓,但仍远小于2,由此可知,式(10)中 $\mathbf{a}$ 取1即可满足收敛条件;由图2可以看出条件数 $t$ 与迭代次数 $N$ 具有明显线性关系,当迭代次数 $N$ 超过40,条件数已经接近100,单纯用式(9)已经很难得到高质量的图像。

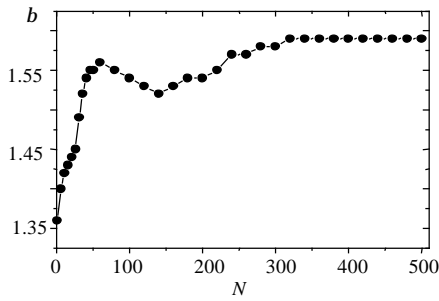


图 1  $b$  与  $N$  的关系曲线

Fig. 1 Relationship between  $b$  and iterative times  $N$

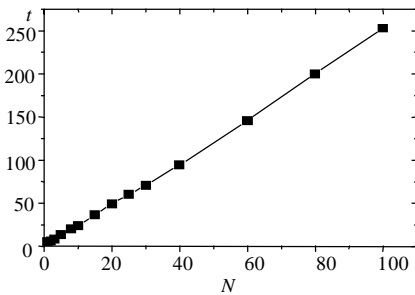


图 2 预置矩阵  $D_N$  条件数  $t$  与  $N$  的关系曲线

Fig. 2 The condition number of  $D_N$  versus iterative times  $N$

图 3 为带有隔离电极的 12 电极方型传感器截面图, 被测区域为  $80\text{mm} \times 80\text{mm}$ 。为获得合适的  $N$  及证明采用双阶段迭代的有效性, 首先对如图 3 所示结构进行测量验证, 底层为玻璃珠, 其高为  $17\text{mm}$ , 介电常数为 1.8, 上部为一直径  $20\text{mm}$  的有机玻璃棒, 其中心距底部  $41\text{mm}$ , 介电常数为 2.6。

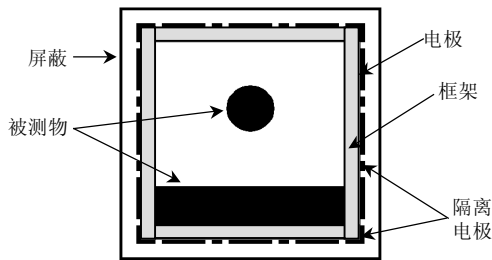


图 3 传感器结构示意图

Fig. 3 Layout of ECT

为了对重建图像质量进行评价, 常采用重建图像的相对误差、相关系数两个参数。重建图像的相对误差越小, 重建图像的相关系数越大, 则说明重建图像的效果越好, 两参数公式为

$$r = \|\hat{g} - g\|_2 / \|g\|_2 \quad (13)$$

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{g}_i - \bar{\hat{g}})(g_i - \bar{g})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\hat{g}_i - \bar{\hat{g}})^2 \sum_{i=1}^N (g_i - \bar{g})^2}} \quad (14)$$

其中,  $g$  为模型的真实分布;  $\hat{g}$  为重建结果,  $\bar{\hat{g}}$  和

$\bar{g}$  分别是  $\hat{g}$  和  $g$  的平均值;  $r$  为重建图像的相对误差;  $\rho$  为重建图像的相关系数。

图 4 给出了采用 GIAPL 法和式(9)在取不同预置矩阵迭代次数下图像相对误差的比较, 考虑算法的实时性, 两种方法迭代次数  $M$  取 10, 采用 LBP 结果作为初始值, GIAPL 法的  $m$  取  $M/2$ 。可以看出, 开始时, 随着  $N$  增加, 相对误差都减小, 但  $N$  超过 10 时, 式(9)的相对误差反而增大, 而 GIAPL 法相对误差继续减小, 显示了较好的稳定性, 当  $N$  超过 20 时, 图像重建误差变化趋势平稳, 对于其它模型测量也得到相似的结论, 因此,  $N$  取 20-60 都可, 本文取 20。

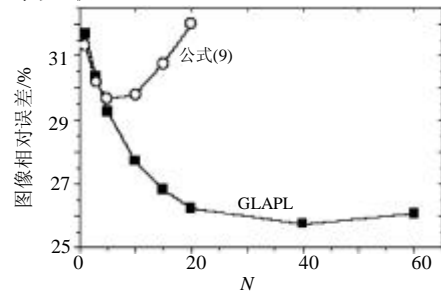


图 4 图像相对误差与预置矩阵迭代次数  $N$  的关系曲线

Fig.4 The image error versus iterative times  $N$

进一步通过计算机仿真与静态实验来验证 GIAPL 法的有效性, 并与 LBP 法、OIOR 法及 PL 法进行比较。电容传感器的有限插分模型将管道剖分为 1024 个单元。所用的仿真参考模型选取了 2 种: 双柱、三柱, 如图 5(a); 静态实验参考模型为: 角柱、斜双柱、边三柱, 如图 5(b)。角柱采用玻璃珠和一直径为  $20\text{mm}$  的有机玻璃棒; 斜双柱采用 2 个直径为  $20\text{mm}$  的有机玻璃棒; 边三柱采用直径为  $12\text{mm}$  的 3 根有机玻璃棒; 玻璃珠和有机玻璃棒的介电常数分别为 1.8 和 2.6。图 5 从上到下依次为真实图像、LBP 法、OIOR 法、GIAPL 法及 PL 法重建图像。其中, LBP 和 OIOR 只做一步矩阵乘法, 不需迭代, GIAPL 法迭代 10 步, PL 法角柱、边三柱迭代 20 步, 其余迭代 30 步。

从图 5 和表 1、2 可以看出, LBP 法重建图像质量较差, 仅能给出定量信息。OIOR 法图像重建质量与 LBP 法相比有了很大提高, 可以减少图像重建时的模糊效应, 区分多个物体, 重现大物体周围的小物体, 但同时还引入了伪迹, 影响了图像重建质量。GIAPL 法与 PL 法重建图像质量相近, 除了具有 OIOR 法的优点外, 还有效地消除了伪迹, 抑制了噪音, 使重建图像更为清晰。

表 3 给出在 PIV1.7G CPU, 512 M 内存配置的 PC 机环境下不同算法计算速度的比较。GIAPL

法耗时 31ms, 是 LBP 和 OIOR 法的 10-15 倍, 但却是 PL 法的 1/3 到 1/2, 在同样成像质量下, 速度优于 PL 法。

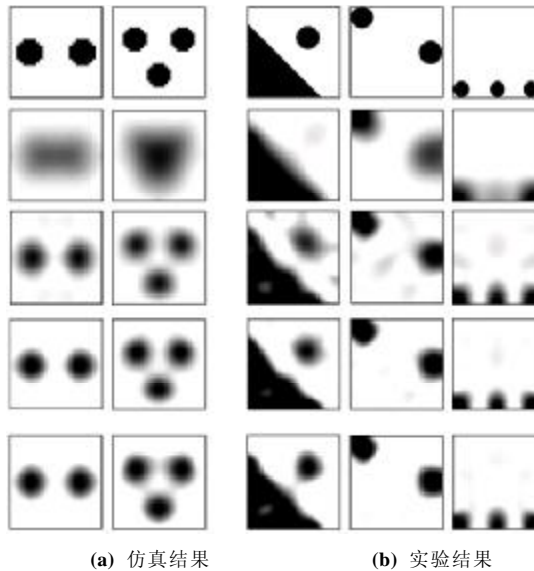


图 5 LBP、OIOR、GIAPL 和 PL 成像结果的比较  
Fig. 5 Comparison of the reconstructed tomograms when using LBP, OIOR, GIAPL and PL

表 1 相对误差  $r$  (%)

方法	双柱	三柱	角柱	斜双	边三
LBP	81.84	93.41	45.94	62.88	67.53
OIOR	55.37	59.86	37.97	51.41	48.00
PL ( $\alpha=1$ )	50.40	52.70	28.89	42.98	44.14
GIAPL	49.80	52.81	29.90	43.07	44.20

表 2 相关系数  $\rho$

方法	双柱	三柱	角柱	斜双	边三
LBP	0.510	0.291	0.836	0.754	0.719
OIOR	0.844	0.803	0.883	0.844	0.870
PL ( $\alpha=1$ )	0.888	0.866	0.937	0.893	0.902
GIAPL	0.888	0.864	0.935	0.892	0.899

表 3 耗时间 (ms)

方法	双柱	三柱	角柱	斜双	边三
LBP			2~3		
OIOR			2~3		
PL ( $\alpha=1$ )	94	93	63	94	63
GIAPL			31		

#### 4 结论与讨论

本文提出了一种基于广义逆迭代法的快速投影 Landweber 迭代法(GIAPL)。该算法具有对预置矩阵参数选取简单, 易于满足收敛条件等优点。与线性反投影算法(LBP)、迭代法(OIOR)以及投影 Landweber 迭代法(PL)进行了对比, 并以重建图像的相对误差、相关系数作为评价标准。结果

表明, OIOR 法、PL 法及 GIAPL 法重建图像的质量均优于 LBP 法, 而 GIAPL 法重建图像的质量优于 OIOR 法, 与 PL 法相当, 但收敛速度却优于 PL 法。由此可见, GIAPL 法兼备收敛稳定性好及收敛速度快等优点。

#### 致 谢

本课题受到中国科学院工程热物理所的项目资助, 特此致谢。

#### 参考文献

- [1] York T. Status of electrical tomography in industrial applications[J]. Journal of Electronic Imaging, 2001,10(3): 608-619.
- [2] 王翠苹, 李定凯, 董国亚, 等. 广义矢量模式匹配法在电容层析成像技术上的应用[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(8): 219-223.  
Wang Cuiping, Li Dingkai, Dong guoya *et al.* A study on application of generalized vector sample pattern matching method to electrical capacitance tomography[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(8): 219-223.
- [3] 王海刚, 刘石, 姜凡, 等. 电容层析成像技术在旋风分离器固体浓度测量中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(1): 174-179.  
Wang Haigang, Liu Shi, Jiang Fan *et al.* Using electrical capacitance tomography for measuring the solids distribution in cyclone separator[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(1): 174-179.
- [4] 王海刚, 刘石, 姜凡, 等. 旋风分离器料腿中颗粒流量电容相关测试分析与实验研究[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(2): 176-180.  
Wang Haigang, Liu Shi, Jiang Fan *et al.* Mass flow measurement of solids flow in the dipleg of a cyclone separator using electrical capacitance sensors[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(2): 176-180.
- [5] Xie C G, Huang S M, Hoyle B S *et al.* Electrical capacitance tomography for flow imaging: System model for development of image reconstruction algorithms and design of primary sensors[J]. IEE Proceedings-G, 1992, 139 (1): 89-97.
- [6] Yan H, Liu L J, Xu H *et al.* Image reconstruction in electrical capacitance tomography using multiple linear regression and regularization[J]. Meas. Sci. Technol. 2001, 12(1): 575-581.
- [7] Liu S, Wang H G, Jiang F *et al.* A new image reconstruction method for tomographic investigation of fluidized beds[J]. AIChE Journal, 2002, 48(8): 1631-1638.
- [8] Yang W Q, Spink D M, York T A. An image reconstruction algorithm based on Landweber iteration method for electrical capacitance tomography[J]. Meas. Sci. Technol, 1999, 10(11): 1065-1069.
- [9] Liu S, Fu L, Yang W Q *et al.* Prior-online iteration for image reconstruction with electrical capacitance tomography[J]. IEE Proc.-Sci. Meas. Technol., 2004, 151(3): 195-200.
- [10] Piana M, Bertero M. Projected Landweber method and preconditioning [J]. Inverse Problems, 1997, 13(2): 441-463.
- [11] Strand O N. Theory and methods related to the singular-function expansion and Landweber's iteration for integral equations of the first kind[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1974, 11(4): 798-825.

收稿日期: 2005-01-28。

作者简介:

董向元(1974-), 男, 中国科学院研究生院博士研究生, 主要从事电容层析成像及两相流研究工作;