一种计算各向异性分形维数的新方法*

邹晓春[1], 冯　燕[1], 赵歆波[2]

(1. 西北工业大学 电子信息学院, 陕西 西安 710072; 2. 西北工业大学 现代设计与集成制造技术教育部重点实验室, 陕西 西安 710072)

摘　要: 分形维数是描述分形的重要参数, 分形维数的计算是分形几何研究的重要内容。传统上分形维数的计算是基于各向同性这一假设所得到的维数计算方法, 不适合具有各向异性特性的自然地形的维数计算。基于微分统计法, 提出并实现了一种计算各向异性分形维数的新方法, 该算法通过保留方向信息, 达到了计算不同方向上不同分形维数的目的。利用频谱合成法生成的各向异性分形曲面进行实验的结果表明, 算法是正确且有效的。

关键词: 分形维数; 微分统计法; 各向异性分形

中图法分类号: TP391. 4　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1001-3695(2005) 07-0029-02

A Method of Anisotropic Fractal Dimension Computation

ZOU Xiao-chun[1], Feng Yan[1], ZHAO Xin-bo[2]

(1. School of Electronic Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shanxi 710072, China; 2. Key Laboratory of Contemporary Design & Integrated Manufacturing Ministry of Education, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shanxi 710072, China)

Abstract: The fractal dimension is the most fundamental feature to characterize fractal. Computing fractal dimension is a very important studying topic in fractal geometry. Traditionally methods of computing fractal dimension are based on the assumption that fractal is isotropic. However, this is not adapt to the nature terrain whose fractal dimension is anisotropic. This paper presents a new method, which is based on difference statistics method, to computing the anisotropic fractal dimension. By keeping the direction information, this method can compute different dimensions in different directions. Using a simulation anisotropic fractal which is generated by spectral synthesis method as the experimental data, the experimental results show that new method is right and effective.

Key words: Fractal Dimension; Difference Statistics Method; Anisotropic Fractal

1　引言

逼真模拟自然场景中的地形是近年来计算机图形学研究的一个重要课题。随着仿真技术和虚拟现实应用需求的不断提高, 它在实际中的应用越来越广泛, 如飞行器模拟、视觉仿真、军事演习及训练、基于遥感和卫星图像的大范围虚拟环境自动建模等。20 世纪 70 年代, Mandelbrot 创立了分形几何学, 用以研究自然界中复杂的、不规则的几何现象。他指出, 自然地形在一个较大的尺度范围内具有统计不变性, 所以是一个分形。之后, 用分形的方法来模拟自然地形成为分形几何近年来最为流行的应用领域之一。利用分形几何对自然地形建模的关键是将自然地形看成具有统计自相似性的曲面, 而能反映这种统计自相似性的重要参数, 就是分形维数。事实上, 分形维数决定了自然地形粗糙和不规则的程度。

正因为如此, 能否从实际获得的数据集准确地估算出分形维数, 就成为分形学研究的一个重要方向。目前, 存在多种计算分形维数的方法, 如盒子计数(Box-counting) 方法[1]、谱分析(Spectral Analysis) 方法[2]、使用小波的多分辨率分析法(Multiresolution Analysis)[3]、最大似然估计法(Maximum Likelihood Estimator)[4]以及 Pentland 的分形布朗运动方程法(Fractional Brownian Function Approach)[5]。所有这些方法均是基于自然地形是各向同性(Isotropic) 这样的假设。而我们知道, 自然地形是各向异性的(Anisotopic) , 所谓各向异性, 指的是在不同的方向, 分形曲面的粗糙度是不一样的, 即分形维数是不一样的。因此, 现有计算分形维数的方法不适合计算各向异性分形曲面维数。有关计算各向异性分形维数的方法, 很少看见有文献报道。本文首先给出分形维数的定义, 再基于微分统计法提出了一种新的计算各向异性分形维数的算法。新算法通过保留方向信息, 达到了计算不同方向上分形曲面维数的目的, 为生成逼真的、具有各向异性、真实感效果良好的分形地形的研究开辟了一条新的途径。

2　分形维数

分形维数的定义有多种不同的形式, 同一个分形用不同的定义计算其维数时, 其结果可能是不相同的。其原因是分形的各种维数定义之间是不等价的, 因此, 在考查一个分形维数时, 首先应搞清楚是在哪种定义下的维数。本文从统计自相似性的概念, 导出分形维数的定义。

(1) 自相似性。在一个 E 维欧氏空间中, 考虑点 $x = (x_1, \cdots, x_E)$ 的集合 S, 对其进行比例变换 $r(r > 0)$, 得到一个新的集合 rS, 其中, 集合中的点变为 $rx = (rx_1, \cdots, rx_E)$ 。若 S 是 N 个

收稿日期: 2004-07-16; 修返日期: 2004-09-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60141002)

互不相交的子集的合集,且每个子集都是经过尺度变换后得到的相同的集合 rS,那么我们称 S 集合是自相似的。

(2) 统计自相似性。如果经过尺度变换后的物体并不完全相似,但在统计方面却是一致的,那么就称物体呈现统计自相似性(Statistically Self-similar)。

(3) 分形维数。一个分形维数为 D 的自相似物体,可以分成 N 个自身的小的拷贝,对每一个这样的拷贝,尺度变换的比例因子是 $r = 1/\sqrt[D]{N}$。于是分形维数可用下式计算出来:

$$D = \frac{\log N}{\log 1/r} \tag{1}$$

在分形几何中,一般用分形布朗运动方程来描述这种具有统计自相似性特性的分形。

3 分形布朗运动

分形布朗运动(fractional Brownian motion, fBm)是物理学中典型布朗运动的扩展,可以最好地描述自然地形模型[6]。fBm 可以对不确定随机过程建模,这种过程通常称为 1/f 噪声过程。

分形布朗运动方程 $f(x)$ 是一个实值随机方程,其形式为

$$P\left[\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\|\triangle x\|^{H}}<t\right]=F(t) \tag{2}$$

其中,x 是 E 维欧氏空间 R^E 中的一点;$F(t)$ 为随机变量 t 的分布函数,该随机变量服从标准正态分布 $N(0,\sigma^2)$;$\|\triangle x\|$ 为采样间隔;H 是 Hurst 空间维数,在这里是个常数,且 $0<H<1$。H 控制着分形的复杂度,如果 $H<1/2$,那么分形布朗运动的增量是负相关的;$H=1/2$ 对应于经典布朗运动的情况;如果 $H>1/2$,则增量是正相关的,分形布朗运动的两个相邻的函数值具有相同的符号。参数 H 与分形维数 D 的关系如下:

$$D = E + 1 - H \tag{3}$$

显然,对于三维曲面,其中 $E=2$,分形维数为

$$D = 3 - H \tag{4}$$

如果曲面具有大的 D 值,小的 H 值,相对来讲,就比较不规则,曲面上的点在高度上的差别就比较大;反之,如果 D 值小,H 值大,看起来就会光滑一点。

4 微分统计法

根据分形布朗运动方程的定义,可以得到计算分形维数的微分统计法。假设 $F(t)$ 是符合零均值高斯分布的函数,即分布密度为 $N(0,\sigma^2)$,其中 σ^2 是方差。于是 $F(t)$ 可用下式给出:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}s \tag{5}$$

根据 Pentland[2] 的定义,分形布朗运动方程可以写成另一种等价的形式,即

$$E[\,|f(x+\triangle x)-f(x)|\,]\cdot\|\triangle x\|^{-H}=C \tag{6}$$

其中,$E[\,|f(x+\triangle x)-f(x)|\,]$ 是对于固定距离 $\triangle x$ 函数值差分的数学期望,常量 C 等于随机变量 $|t|$ 的均值。于是,根据式(5)可得参数 C 和 σ 之间的关系:

$$C = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma \tag{7}$$

对式(6)两边取对数可得:

$$\log E[\,|f(x+\triangle x)-f(x)|\,] - H\log\|\triangle x\| = \log C \tag{8}$$

因为参数 H 和 C 均是常数,所以从公式(8)可以看出,以 $E[\,|f(x+\triangle x)-f(x)|\,]$ 和 $\|\triangle x\|$ 为坐标的对数图中,存在一条直线,该直线的斜率就是参数 H,如图 1 所示。

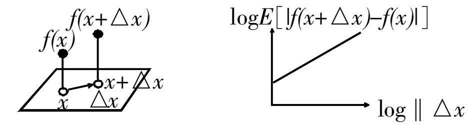

图 1 分形布朗运动及数图

这就是说,可以通过在对数图中拟合一条直线的方法获得参数 H,再利用式(4),即可计算出分形维数。

$$D = 3 - H \tag{9}$$

5 一种用于计算各向异性分形维数的改进统计方法

上面讨论了计算分形维数的微分统计法。该方法考虑了曲面上每个可能的点对,通过两点高度差的均值 $E[\,|f(x+\triangle x)-f(x)|\,]$ 和两点间的距离 $\triangle x$ 之间的关系计算分形维数。然而,这种方法仅仅考虑了两点间的距离信息,如果能同时考虑此两点间连线与 x 轴的夹角,那么就可以获得方向信息。通过对不同的方向生成不同的差分四边形,在前述方法的单个图的位置上,可以生成多个以 $E[\,|f(x+\triangle x)-f(x)|\,]$ 和 $\triangle x$ 为坐标轴的对数图,于是,就可以计算出不同方向上单独的分形维数的值。这就是本节提出的用于计算各向异性分形维数的方法。差分四边形间隔角度越小,方向性越好。但是,使角度变小的同时,会减少每个方向上的可用数据的数量,因此,也就降低了每个独立图的精度,也就是说,降低了分形维数的精度,这是因为可用的点少了,统计特性就不会太好。当然,也可以仅仅定义一个角度,计算在这个方向上的点对,从而获得这个方向上的分形维数,如只使用水平或垂直的点对。

6 实验及结果

本文采用文献[7]所描述的方法生成具有各向异性特性的分形曲面。采用的参数为 $H_x = 0.9$, $H_y = 0.9$,生成的分形曲面形状如图 2 所示。

图 3 显示了用改进的统计算法计算分形曲面在各个方向上的分形维数的结果。用 10 个角度的差分四边形测量了分形维数。结果显示,在不同的方向上,曲面确实显示了不同的分形特征,统计方法确实可以测出分形维数的各向异性。

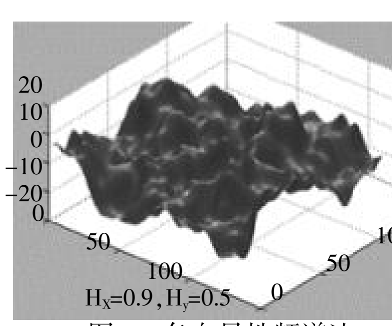

图 2 各向异性频谱法生成的分形曲面

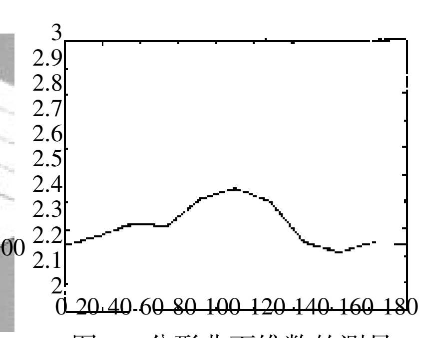

图 3 分形曲面维数的测量(横轴为角度,纵轴为分形维数)

7 结论

本文基于微分统计法,提出并实现了一种计算各向异性分形维数的新方法。不同于现有的算法,该方法可以计算出具有各向异性特性的分形曲面在不同方向上的分形维数,通过保留方向信息来实现各向异性分形维数的计算。 (下转第 33 页)