

文章编号: 1001-4322(2003)08-0813-04

圆柱和平板磁绝缘传输线的横向空间电荷流*

林其文, 王文斗, 谢卫平, 王 强

(中国工程物理研究院 流体物理研究所, 四川 绵阳 621900)

摘 要: 根据电磁场理论及电子运动守恒方程导出圆柱和平板传输线横向空间电荷流的数值模型和磁绝缘临界条件。通过数值计算,给出了传输线的几何结构参数和电压分别与空间电荷流的关系。

关键词: 平板; 圆柱; 磁绝缘传输线; 横向空间电荷流; 磁绝缘临界条件

中图分类号: TN78

文献标识码: A

脉冲功率在磁绝缘传输线(Magnetically insulated transmission line,简称 MITL)中传播时,其波阵面前沿区尚未达到磁绝缘状态,阴极发射出的电子在电场作用下形成横向电流,并损失到阳极上。但是,这种横向电荷流又受到电流磁场的约束(箍缩)而向纵轴方向偏转,致使空间电荷流的横向分量逐渐减小。当磁场达到某临界值时,横向空间电荷流降至零。研究 MITL 的磁绝缘临界条件和横向空间电荷流与电压、磁场等的关系,对理解脉冲功率在 MITL 中的传播特性是很重要的,它在有效电路模拟中也是极为有用的^[1]。

至今,磁绝缘的稳态理论主要有三个模型:单粒子模型、薄层流模型和任意动量模型^[2,3]。虽然后两个模型考虑了空间电荷效应对真空间隙电磁场的影响,得到了更为精确的磁绝缘临界电流,但不能确定横向空间电荷流,所以我们采用单粒子模型。

常用的高功率脉冲传输线的几何结构有平板、圆柱、圆锥等。Bergeron^[4]等人已研究了平板情况下的损失电流。本文将考虑圆柱,而平板仅作为圆柱的极限情况进行讨论。本工作是在 Bergeron^[4]的平板研究基础上进行的,但圆柱的主要研究结果是比较新的。

1 理 论

传输线内电磁场以横电磁波(TEM)传播,即电场、磁场与功率传播方向互相垂直。假定,在同轴传输线中,电场 E 仅在 r 方向,电极方向为负极向,即内电极为阴极,半径 R_c ,外电极为阳极,半径 R_a ,磁场 B 仅在 ϕ 方向,功率在 z 方向传播,电压 V 和矢势 A 与 z 无关。因轴对称关系,所有物理量都与 ϕ 无关,速度分量 $v_\phi = 0$ 。 B 与 A 的关系通过 $B = \nabla \times A$ 给出

$$B_\phi = - \partial A_z / \partial r \tag{1}$$

借助安培定律,磁场与电流 I 的关系为

$$B_\phi r d\phi = \mu_0 I$$

或

$$B_\phi = \mu_0 I / 2 r \tag{2}$$

式中: μ_0 为真空磁导率。

考虑与时间无关的问题。电子在阴-阳极真空中运动的能量关系为

$$m_0 c^2 - eV = m_0 c^2 \tag{3}$$

式中: γ 为相对论因子, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $v = v/c$; V 为电势,并且阴极电势取为零,电子在阴极上的动能为零; e , m_0 和 v 为电子的电荷、静止质量和速度, c 为光速。电子运动的拉格朗日函数取为

$$L = - m_0 c^2 \sqrt{1 - (v_r^2 + v_z^2)/c^2} + e(V - v_z A_z) \tag{4}$$

在 z 方向的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_z} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

* 收稿日期:2002-10-24; 修订日期:2003-03-26
基金项目:国防科技基础研究基金资助课题
作者简介:林其文(1939-),男,副研究员,绵阳 919-105 信箱。

由于 L 与 z 无关, $\partial L / \partial z = 0$, 所以电子运动的正则动量分量 p_z 为常数

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial v_z} = m_0 v_z - eA_z = \text{const} \quad (6)$$

设 $t=0$ 时, 电子从阴极处发射。在阴极处, $v_z=0$, 并取 $A_z=0$, 则 $p_z=0$, 所以

$$z = eA_z / m_0 c \quad (7)$$

对单粒子模型, 阴极电流与阳极电流是相等的, 即(2)式中的 I 与 r 无关为常数, 所以磁场 B_ϕ 随 r 而变化, 为此考察 A_z 的特性。由(1)式积分得,

$$A_z = - \int_{R_a}^r B_\phi dr$$

引入新坐标 x

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{r} \quad (8)$$

则

$$A_z = - \int_{x_a}^x B_\phi r dx = - B_\phi r (x - x_a) \quad (9a)$$

注意, $B_\phi r = \mu_0 I / 2$ 与 r 无关, 可当常数处理。显然 A_z 在真空间隙内随径向位置而变化, 定义一个与 r 无关的量, 这就是穿过单位长度传输线的真空间隙的磁通 A (或叫磁压), 它直接影响横向空间电荷流。

$$A = - \int_{x_c}^{x_a} B_\phi r dx = - B_\phi r (x_a - x_c) \quad (9b)$$

或

$$A_z = A (x - x_c) / (x_a - x_c), \quad x_c \leq x \leq x_a \quad (9c)$$

将(9c)式代入(7)式, 得

$$z = u_0 (x - x_c) / (x_a - x_c), \quad u_0 = eA / m_0 c \quad (10)$$

根据 z 与 x 的关系, 及(10)式的 z 可得 r 为

$$r = \left[2 - u_0^2 [(x - x_c) / (x_a - x_c)]^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (11)$$

设间隙中电荷密度为 ρ , 则横向空间电荷流密度为

$$J_r = - \rho v_r \quad (12)$$

在广义坐标 x 下, 圆柱间隙中的泊松方程为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{r^2 J_r}{\epsilon_0 v_r} \quad (13a)$$

式中: ϵ_0 为真空介电常数。能量方程(3)可记为 $\gamma = 1 + V / V_0$, $V_0 = m_0 c^2 / e = 0.511 \text{ MV}$ 。将式(13a)改变成的方程, 并用(11)式置换 v_r , 得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{Z_0}{V_0} r^2 J_r \frac{1}{\sqrt{2 - u_0^2 [(x - x_c) / (x_a - x_c)]^2 - 1}} \quad (13b)$$

式中: $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 377 \Omega$ 。

由稳态下的电荷守恒, $\nabla \cdot \mathbf{J} = - \partial \rho / \partial t = 0$, 得柱坐标下的径向电流密度满足条件

$$r J_r = \text{const} \quad (14)$$

其中的常数表示与 r 及 x 都无关, 因此(13b)式中的 $r^2 J_r$ 应写为

$$r^2 J_r = (r J_r) r - (r J_r) e^{-x} \quad (15)$$

其中 $(r J_r)$ 表示与 x 无关的常数。为了积分简单, 作变换 $\xi = (x - x_c) / (x_a - x_c)$, 则(13b)式简化为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \frac{\ln^2(R_a / R_c) (R_c r J_r)}{I_0} \frac{(R_a / R_c)}{\sqrt{2 - u_0^2 \xi^2 - 1}}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (16)$$

式中: $I_0 = V_0 / Z_0 = 1.355 \text{ kA}$ 。假定阴极电压为零, 阳极电压为 V , 则由阴极上电场为零和能量守恒关系, 可得 () 的积分条件为

$$\phi(0) = 1, \quad \psi(0) = 0 \tag{17a}$$

$$\phi(1) = 1 + V/V_0 \tag{17b}$$

对方程(16)数值积分,凡满足积分条件(17)式的解就是所需要的。用迭代法,可以求出 $R_c rJ_r = f(V, u_0)$ 的积分曲面,即横向空间电荷流 J_r 与电极电压 V 和磁通 A 的关系。显然(16)式中的 u_0 的取值范围有一定限制,这就是要讨论的磁绝缘条件。

因磁场对电子横向运动的约束,当磁通 A 足够大时, $v_r = 0$ 。我们把电子在阳极处 ($x = x_a$) 的径向速度为零的条件,称为磁绝缘临界条件。将磁绝缘临界状态时的 u_0, A, B 和 I 分别记为 u_c, A_c, B_c 和 I_c 。由(11)式可得无量纲量 u_0 的磁绝缘临界值 u_c

$$u_c^2 = \frac{2}{a} - 1 = 2V/V_0 + V^2/V_0^2 \tag{18a}$$

或得磁通 A 的磁绝缘临界值 A_c

$$(cA_c/V_0)^2 = 2V/V_0 + V^2/V_0^2 \tag{18b}$$

由(9b)式,亦可表示磁场 B_ϕ 的磁绝缘临界值

$$[c \ln(R_a/R_c) rB_c/V_0]^2 = 2V/V_0 + V^2/V_0^2 \tag{18c}$$

由(2)式,亦可得到电流 I 的磁绝缘临界值

$$I_c = I \ln^{-1}(R_a/R_c) (2V/V_0 + V^2/V_0^2)^{1/2} \tag{18d}$$

式中: $I = 2 V_0/\mu_0 c \approx 8.5 \text{ kA}$ 。(18)式就是各种物理量的磁绝缘临界值的表述,其中临界磁通 A_c 最有用处。

从上述对磁绝缘临界条件的讨论可见,只有当磁场小于磁绝缘临界值时,传输线才有横向空间电荷流损失,这就是说方程(16)式中 u_0 的取值范围为

$$0 \leq u_0 \leq u_c \tag{19}$$

当 $u_0 = 0$ 时,(16)式就是无磁场时阴极发射的空间电荷流方程;当 $u_0 = u_c$ 时,传输线已处于磁绝缘状态,横向空间电荷流密度 $J_r = 0$, (16)式已无意义。

最后,讨论(16)式的一个特殊情况。设 $R_a - R_c = d$, 则 $R_a/R_c = 1 + d/R_c$, 当 $d/R_c \ll 1$ 时, (16)式可转变为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{d^2 J_x}{I_0} \frac{1}{\sqrt{2 - u_0^2 - 1}}, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{20}$$

(20)式就是平板传输线的横向空间电荷流密度 J_x 的方程。所以平板可以看成圆柱间隙厚度足够小而内半径足够大的极限情况。

2 算例

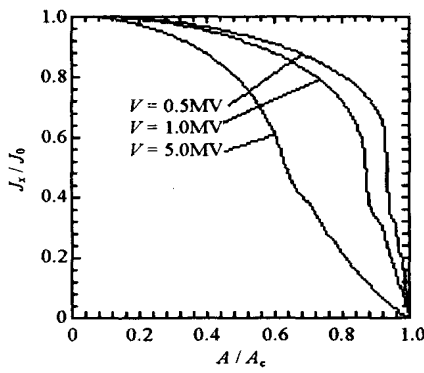
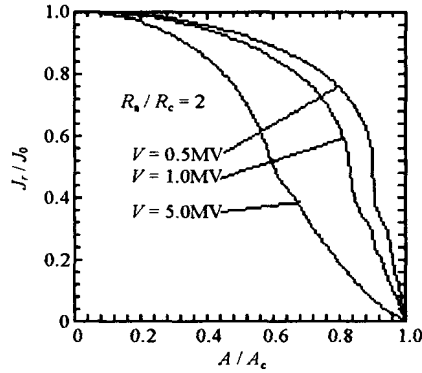
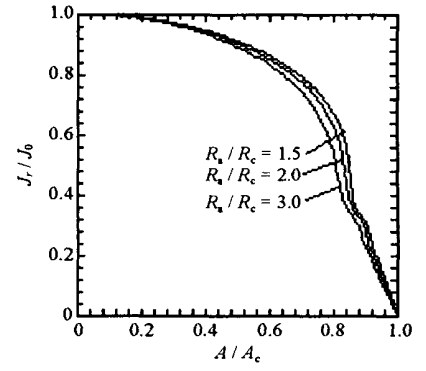
首先论证了当磁场为零时,平板的空间电荷流与 Boers^[5]的相对论精确解符合很好,精度为 5~6 位有效数字。平板和圆柱都用 J_0 表示磁场为零的空间电荷流密度。在表 1 中,列出了部分电压 V 和 R_a/R_c (对圆柱)时的无磁场的空间电荷流, $d^2 J_0$ 表示平板的无磁场电荷流, $R_c rJ_0$ 为圆柱的无磁场电荷流。图 1 给出了不同电压时平板的 J_x/J_0 关于磁通 A/A_c 的曲线。图 2 为 $R_a/R_c = 2$ 的圆柱 J_r/J_0 关于磁通 A/A_c 的曲线。图 3 为电压 $V = 1.0 \text{ MV}$ 及不同 R_a/R_c 比值时, J_r/J_0 关于磁通 A/A_c 的曲线。

表 1 无磁场的空间电荷流

Table 1 Space charge flow in the limit $B = 0$

plane/cylinder	R_a/R_c	V/MV	$(d^2 J_0, R_c rJ_0)/\text{kA}$
planes	/	0.5	0.755 14
plane line	/	1.0	1.989 08
plane line	/	5.0	16.108 78
cylinder line	2.0	0.5	1.334 29
cylinder line	1.5	1.0	10.976 05
cylinder line	2.0	1.0	3.485 51
cylinder line	3.0	1.0	1.238 30
cylinder line	2.0	5.0	27.504 85

从表 1 看出,不考虑磁场约束的空间电荷流随线电压的增加而增加,这是必然的。对于圆柱,当半径比

Fig. 1 J_x/J_0 vs A/A_c for plane line图 1 平板的 J_x/J_0 对 A/A_c 的曲线Fig. 2 J_r/J_0 vs A/A_c for cylinder line图 2 圆柱的 J_r/J_0 对 A/A_c 的曲线Fig. 3 J_r/J_0 vs A/A_c for cylinder lines图 3 圆柱的 J_r/J_0 对 A/A_c 的曲线

R_a/R_c 越小时,空间电荷流越大,这是因为 R_a/R_c 越小,间隙厚度越小(假定阴极半径 R_c 相等),横向电场大,空间电荷流损失也大。从图 1 和图 2 可见,当电压较高时,空间电荷流受磁通或磁场的约束很强,其无量纲值 J_x/J_0 或 J_r/J_0 随 A/A_c 的增加而降低很快,这充分显示了磁绝缘线在高压运行时磁绝缘性的重要意义。由图 3 看出,当圆柱线电极的半径比 R_a/R_c 越大时, J_r/J_0 受磁场的约束要强些,这是因为 R_a/R_c 大,间隙厚度大,所以磁通也大,必然制约空间电荷流的程度更强。不过,由于远离阴极(内半径)处的地方磁场较小,该区域对磁通的贡献不大,因此,比值 R_a/R_c 虽对 J_x/J_0 的约束有影响,但影响甚微。

3 结 语

本文由相关的电磁场理论和电子运动守恒方程,导出了圆柱传输线的横向空间电荷流的数值模型以及磁绝缘临界条件,平板传输线的数值模型作为圆柱的特殊情况也被给出。对两种情况都进行了计算和讨论。加深了对传输线运行特性的认识,同时在有效电路模拟中是很有用处的。

参考文献:

- [1] Bergeron K D. Equivalent circuit approach to long magnetically insulated transmission lines[J]. *J Appl Phys*, 1977, **48**(7):3065—3069.
- [2] DI Capua M S. Magnetic insulation[J]. *IEEE Trans Plas Sci*, 1983, **11**(3):205—215.
- [3] Creedon J M. Relativistic Brillouin flow in the high diode[J]. *J Appl Phys*, 1975, **46**(7):2946—2955.
- [4] Bergeron K D, Poukey J W. Relativistic space-charge flow in a magnetic field[J]. *Appl Phys Lett*, 1975, **27**(2):58—60.
- [5] Boers J E, Kelleher D. Exact solution of Poisson's equation for space-charge-limited flow in a relativistic planar diode[J]. *J Appl Phys*, 1969, **40**(6):2409—2412.

Transverse space-charge flow in planes and cylinders magnetically insulated transmission lines

LIN Qi-wen, WANG Weir-dou, XIE Weir-ping, WANG Qiang

(Laboratory for Shock Wave and Detonation Physics Research, Institute of Fluid Physics, CAEP,
P. O. Box 919-105, Mianyang 621900, China)

Abstract: Electromagnetic field theory and electron motion conservation equations are used to derive numerical model of transverse space-charge flow and magnetically insulated critical condition in plane and cylinder transmission lines. Through numerical simulation, this paper discusses the influence of the voltage and the geometrical parameters on the transverse space-charge flow and magnetically insulated performances.

Key words: Plane transmission line; Cylinder transmission line; Magnetically insulated transmission line; Transverse space-charge flow; Magnetically insulated critical condition