

文章编号: 1001-4322(2003)09-0927-05

圆锥磁绝缘传输线的横向空间电荷流*

林其文, 王文斗, 谢卫平, 王 强

(中国工程物理研究院 流体物理研究所, 四川 绵阳 621900)

摘 要: 根据电磁场基本理论及电子运动守恒方程, 导出圆锥传输线横向空间电荷流的数值模型和磁绝缘临界条件。通过数值计算, 讨论了电压及圆锥几何结构参数等对横向空间电荷流和磁绝缘性能的影响。电压较高时, 无磁场的空间电荷流较大, 而磁绝缘性能更好。在传输线的三个几何参数中, 几何因子对传输性能影响最大。

关键词: 圆锥; 磁绝缘传输线; 横向空间电荷流; 磁绝缘临界条件

中图分类号: TL501⁺5 **文献标识码:** A

脉冲功率在磁绝缘传输线(Magnetically insulated transmission lines, 简称 MITL)中传播时, 波阵面前沿区尚未达到磁绝缘状态, 阴极发射出的电子在电场作用下形成横向空间电荷流, 并损失到阳极上。但是, 这种横向空间电荷流又受到电流磁场的约束(箍缩)而向纵轴方向偏转, 因此, 空间电荷流的横向分量逐渐减小(纵向分量增加, 磁场也增大)。当磁场达到某临界值时, 横向空间电荷流降至零, 这就是所谓的磁绝缘。研究 MITL 的磁绝缘临界条件和横向空间电荷流与电压、磁场等的关系, 对认识脉冲功率在 MITL 中的运行特性是很重要的, 在有效电路模拟中也是极为有用的^[1]。至今, 磁绝缘传输线的稳态理论主要有三种模型: 单粒子模型, 薄层流模型和任意动量模型^[2, 3]。虽然两个模型考虑了空间电荷和电流对真空间隙电磁场的影响, 得到了比较精确的磁绝缘临界电流, 但不能确定横向空间电荷流, 所以本文采用单粒子模型。

常用的磁绝缘传输线的几何结构主要有平板、圆柱、圆锥、圆盘等。对平板、圆柱传输线的横向空间电荷流已进行了很有成效的工作^[4, 5], 本文将讨论圆锥的情况。圆锥的研究方法与平板、圆柱的相似, 不过几何结构和数学描述要复杂一些。

1 理 论

传输线内电磁场以横电磁波(TEM)传播, 即电场、磁场与功率传播方向互相垂直。假定圆锥传输线中, 电场 E 在极角 θ 方向, 磁场 B 在方位角 ϕ 方向, 功率沿 r 方向传播。设电极的极性为负极向, 即内电极为阴极, $r = c$, 外电极为阳极, $r = A$ ($c < A$)。本文仅考虑与时间无关的问题。假定电压 V 和磁矢势 A 与 r 无关。因极轴的对称关系, 所有物理量都与 ϕ 无关, 电子在 ϕ 方向的速度分量 $v_\phi = 0$ 。下面, 采用球坐标讨论圆锥电极间隙内电磁场及电子运动的相互关系, 最后导出受磁场约束的横向空间电荷流的方程。首先, 通过 $B = \nabla \times A$ 给出

$$B_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \quad (1)$$

借助安培定律, $B_\phi r \sin \theta d\phi = \mu_0 I$, I 为电流, μ_0 为真空磁导率。或

$$B_\phi = \mu_0 I / 2 r \sin \theta \quad (2)$$

电子在阴-阳极真空间隙中运动的能量守恒关系为

$$m_0 c^2 - eV = m_0 \gamma^2 c^2 \quad (3)$$

式中: γ 为相对论因子, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $v = v/c$; V 为电势, 并且阴极上电势取为零, 电子的动能为零; e , m_0 和 v 分别为电子的电荷、静止质量和速度; c 为光速。电子运动的拉格朗日函数取为

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - (v_r^2 + v_\theta^2)/c^2} + e(V - v_r A_r) \quad (4)$$

r 分量的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

* 收稿日期: 2002-10-24; 修订日期: 2003-03-26
基金项目: 国防科技基础研究基金资助课题
作者简介: 林其文(1939-), 男, 副研究员, 绵阳市 919-105 信箱。

由于 L 与 r 无关, $\partial L / \partial r = 0$, 所以电子运动的正则动量分量 p_r 为常数

$$p_r = \partial L / \partial v_r = m_0 v_r - eA_r = \text{const} \quad (6)$$

在阴极处, 电子的动能为零, 故 $v_r = 0$, 并取 $A_r = 0$, 则 $p_r = 0$ 。所以

$$r = cA_r / V_0 \quad (7)$$

式中: $V_0 = m_0 c^2 / e = 0.511 \text{MV}$ 。

因在圆锥电极的间隙中, 磁场 B_ϕ 为 r 和 x 的函数, 为此考察磁势 A_r , 并对(1)式积分

$$A_r = - \int B_\phi r dx$$

再引入新坐标 x

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{\sin r}, \quad \text{或 } x = \ln(\tan \frac{r}{2}) \quad (8)$$

则

$$A_r = - \int_{x_C}^x B_\phi r \sin r dx \quad (9a)$$

从(2)式可见, (9a)式的被积函数 $B_\phi r \sin r$ 仅与电流 I 有关, 对单粒子模型, 阴极电流与阳极电流是相等的, 即 I 与 r 或 x 无关, 所以(9a)式的积分为

$$A_r = - B_\phi r \sin r (x - x_C) \quad (9b)$$

在(9a)式中, 当积分上限 $x = x_A$ 时, 即为穿过单位长度圆锥传输线的电极间隙的磁通 A (或叫磁压)

$$A = - \int_{x_C}^{x_A} B_\phi r \sin r dx = - B_\phi r \sin r (x_A - x_C) \quad (9c)$$

显然, 磁通 A 与 r 或 x 无关, 它的值将影响间隙中的横向空间电荷流。 A_r 与 A 的关系为

$$A_r = A (x - x_C) / (x_A - x_C), \quad x_C < x < x_A \quad (9d)$$

将(9d)式代入(7)式, 得

$$r = u (x - x_C) / (x_A - x_C), \quad u = eA / V_0 \quad (10)$$

由 r 可求得 u 为

$$u = \left[2 - u^2 \left(\frac{x - x_C}{x_A - x_C} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (11)$$

设间隙中电子的电荷密度为 ρ , 则横向空间电荷流密度为

$$J = - \rho v \quad (12)$$

在广义坐标 x 中, 控制空间电荷限制流的泊松方程为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{r^2 \sin^2 r}{\epsilon_0 v} J \quad (13a)$$

式中: ϵ_0 为真空介电常数。能量方程(3)可记为 $\epsilon = 1 + V / V_0$, 由(13a)和(11)式可得 ϵ 的二阶微分方程

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} = \frac{r^2 \sin^2 r}{I_0} \frac{J}{\sqrt{2 - u^2 [(x - x_C) / (x_A - x_C)]^2 - 1}}, \quad x_C < x < x_A \quad (13b)$$

式中: $I_0 = \epsilon_0 c V_0 = V_0 / \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 1.355 \text{kA}$ 。据稳态下的电荷守恒, $\nabla \cdot \mathbf{J} = - \partial \rho / \partial t = 0$, 因此, 圆锥的极角方向的电流密度应满足关系

$$\sin r J = \text{const} \quad (14)$$

其中的常数表示与 r 即 x 无关, 因此(13b)式中的 $\sin^2 r J$ 应写为

$$\sin^2 r J = (\sin r J) \sin(2 \arctan e^x) \quad (15)$$

式中: $(\sin r J)$ 表示与 x 无关的常数。为了积分简单, 令 $\eta = (x - x_C) / (x_A - x_C)$, 则(13b)式简化为

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \eta^2} = \frac{\sin\{2 \arctan[\tan(\frac{r}{2}) (\tan(\frac{A}{2}) / \tan(\frac{c}{2}))]\} J \cdot r}{\sqrt{2 - u^2 \eta^2 - 1}}, \quad 0 < \eta < 1 \quad (16a)$$

$$= \ln^2[\tan(\frac{A}{2}) / \tan(\frac{c}{2})] J \cdot (r^2 \sin r J) / I_0 \quad (16b)$$

前面已假定阴极电势为零, 再设阳极电势(也就是电压)为 V , 则由阴极上电场为零和能量守恒关系式

(3), 可得 () 的积分条件为

$$(0) = 1, \quad (0) = 0 \tag{17a}$$

$$(1) = 1 + V/V_0 \tag{17b}$$

对方程(16)数值积分, 并且积分解 必须满足条件(17)式。用迭代法, 可以求出 (r²sin J) 在参数坐标 (V, u) 中的积分曲面, 即横向空间电荷流 J 与电极电压 V 和磁通 A 的定量关系。显然(16)式中的 u 的取值范围有一定限制, 这就是下面将要讨论的磁绝缘临界条件。

从(11)式看出, 因磁场对电子横向运动的约束, 当磁通 A (或无量纲量 u) 足够大时, 电子的横向运动速度将为零, v = 0。我们定义, 当电子抵达阳极处 (x = x_A), 它的横向运动速度恰为零时的条件, 称为磁绝缘临界条件。磁绝缘临界状态时的 u, A, B 和 I 分别记为 u_c, A_c, B_c 和 I_c。则由(11)式, 可分别得到它们的磁绝缘临界值

$$u_c^2 = 2V/V_0 + V^2/V_0^2 \tag{18a}$$

$$(cA_c/V_0)^2 = 2V/V_0 + V^2/V_0^2 \tag{18b}$$

$$\left\{ \frac{\ln[\tan(\alpha/2)/\tan(\beta/2)]/rB_c \sin}{V_0} \right\}^2 = 2 \frac{V}{V_0} + \frac{V^2}{V_0^2} \tag{18c}$$

$$I_c = I \ln^{-1}[\tan(\alpha/2)/\tan(\beta/2)](2V/V_0 + V^2/V_0^2)^{1/2} \tag{18d}$$

式中: I = 2 V₀/μ₀c = 8.5kA。以上各种物理量的磁绝缘临界值的表述中, 临界磁通 A_c 最为实用。

从上述对磁绝缘临界条件的讨论可见, 只有当磁场小于磁绝缘临界值时, 传输线才有横向空间电荷流损耗, 也就是说方程(16a)式中 u 的取值范围为

$$0 \leq u \leq u_c \tag{19}$$

当 u = 0 时, (16)式就是无磁场时阴极发射的横向空间电荷流的 方程; 当 u = u_c 时, 传输线处于磁绝缘状态, 已无横向空间电荷流, J = 0, 因此此时(16)式已无意义。

最后, 讨论(16)式的一个特殊情况。假定圆锥线的阴极、阳极的极角都很小 (α < 0, β < 0), 并且设它们与对称轴的半径分别为 R_C = r sin α, R_A = r sin β, 可得到

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\ln^2(R_A/R_C)(R_C R_J R)}{I_0} \frac{(R_A/R_C)}{\sqrt{2 - u^2 - 1}}, \quad 0 \leq u \leq 1 \tag{20}$$

(20)式就是外半径为 R_A, 内半径为 R_C 的圆柱传输线的横向空间电荷流 J_R 的 方程。可见, 圆柱可以看成圆锥的两个电极的极角都为无限小的极限情况, 此时的 方向与垂直于对称轴 z 的 R 方向一致, 所以 J = J_R。

2 算例

对不同的电压或圆锥几何结构参数, 我们计算了 12 个模型。表 1 列出了它们的无磁场时的横向空间电荷流 r²sin J₀ (J₀ 表示磁场为零的 J) 计算结果。表中, α = β - γ 为阴-阳电极间的夹角, k = tan(α/2)/tan(β/2) 为圆锥几何因子。显然, 阴极的极角 β, 两电极间的夹角 γ 和几何因子 k 等三个参量中仅有两个是独立的。表 1 中每三个模型的计算结果绘制一组 J/J₀ 对 A/A_c 的曲线: 模型 1~3, 4~6, 7~9 及 10~12 的分别给出在图 1、图 2、图 3 和图 4 中。

表 1 圆锥 MITL 无磁场时的横向空间电荷流

Table 1 Space-charge flow in the limit B = 0 for cones

model	α / (°)	β / (°)	k	V / MV	r ² sin J ₀ / kA
1	57	3	1.063 4	0.5	236.96
2	57	3	1.063 4	1.0	678.77
3	57	3	1.063 4	5.0	5 046.96
4	10	30	4.160 2	1.0	3.900 1
5	10	40	5.330 0	1.0	2.636 1
6	10	50	6.599 1	1.0	1.949 5
7	10	29.4	3.0	1.0	7.205 5
8	20	55.8	3.0	1.0	3.744 5
9	30	47.6	3.0	1.0	2.664 9
10	40	5.0	1.138 0	1.0	180.93
11	50	5.0	1.116 4	1.0	210.91
12	60	5.0	1.103 4	1.0	234.48

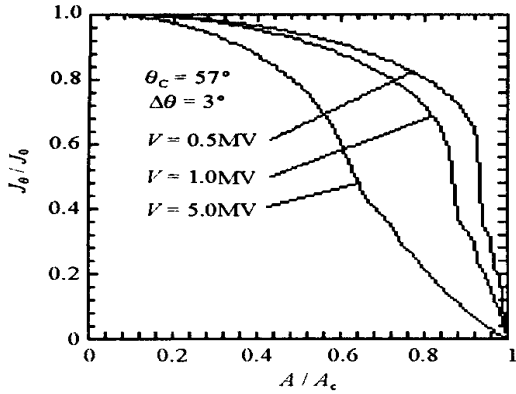


Fig.1 J/J_0 vs A/A_c for $V = 0.5, 1.0, 5.0\text{MV}$

图 1 不同电压时 J/J_0 与 A/A_c 的关系

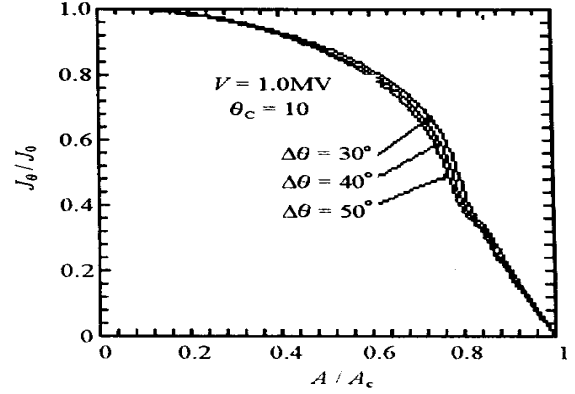


Fig.2 J/J_0 vs A/A_c for $c = 10^\circ$

图 2 $c = 10$ 时 J/J_0 与 A/A_c 的关系

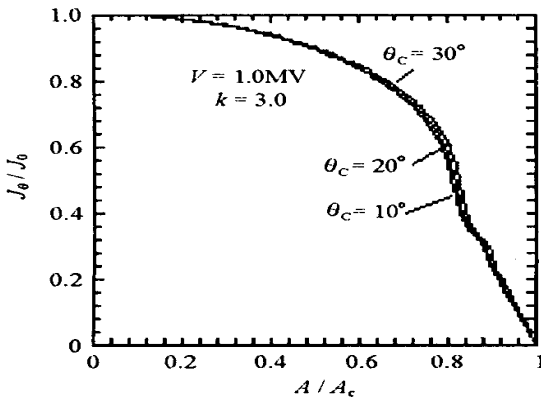


Fig.3 J/J_0 vs A/A_c for $k = 3.0$

图 3 $k = 3.0$ 时 J/J_0 与 A/A_c 的关系

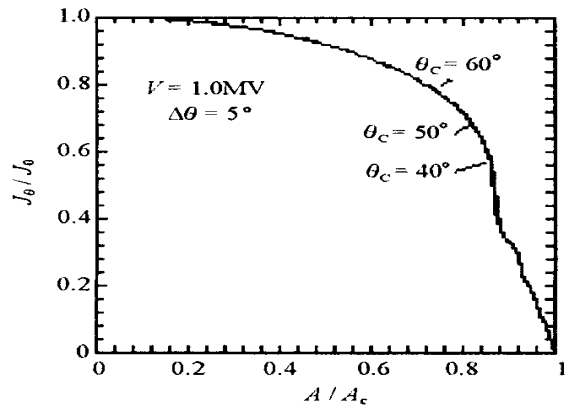


Fig.4 J/J_0 vs A/A_c for $\Delta\theta = 5^\circ$

图 4 $\Delta\theta = 5$ 时 J/J_0 与 A/A_c 的关系

首先应说明,无磁场的横向空间电荷流 $r^2 \sin J_0$ 表示传输线损耗电流的幅度;但 J/J_0 的意义是:若它随 A/A_c 的增加而降低越快,表示传输线的磁绝缘性能越好。这就是说,若要求传输线的损耗电流要小,则 $r^2 \sin J_0$ 应小;若要求它的磁绝缘性能要好,则 J/J_0 随 A/A_c 的增大而衰减要快。从表 1 和图 1~图 4 可看出圆锥传输线以下的两方面的特性。(1)圆锥线的电压越高,损耗电流越大,但磁绝缘性能越显著,表明了传输线在高电压运行时其磁绝缘性的重要意义。实际上,一般的传输线(平板、圆柱、圆盘等)都具有这种特性。(2)圆锥传输线的三个几何参数中,几何因子 k 对它的性能影响最大。对于较大的 k ,可得到较小的损耗电流 $r^2 \sin J_0$ 和较好的磁绝缘性能(J/J_0 随 A/A_c 的增加而衰减较快)。其次,若电极间的夹角 $\Delta\theta$ 较大时,可减小损耗电流;而阴极的极角 θ_c 较小时,可增加磁绝缘性。一般来说,既要无磁场的损耗电流较小又要磁绝缘性较好的传输线,则应要求它的 θ_c 较小,而 $\Delta\theta$ 和 k 都较大。不过,这三个参数中只有两个是独立的,在工程设计中,应根据具体情况首选两个参数,并且适当兼顾第三个参数。

3 结 论

根据电磁场基本理论及电子运动守恒方程导出了圆锥传输线横向空间电荷流的数值模型和磁绝缘临界条件。通过数值模拟,初步得出结论:(1)传输线的电压越高,无磁场的横向空间电荷流越大,但是磁绝缘性能却越好,表明了高电压运行下传输线的磁绝缘性具有特别重要的实际意义。(2)为了减小圆锥传输线无磁场的横向空间电荷流和增强磁绝缘性能,在它的三个几何结构参数(仅两是个独立的)中,要求它的内电极的极角 θ_c 要较小,两电极的夹角 $\Delta\theta$ 和因子 k 都要较大,其中几何因子 k 是影响最大的参数。

参考文献:

[1] Bergeron K D. Equivalent circuit approach to long magnetically insulated transmission lines[J]. *J Appl Phys*, 1977, **48**(7):3065—3069.
 [2] DI Capua M S. Magnetic insulation[J]. *IEEE Trans Plas Sci*, 1983, PS-11(3):205—215.
 [3] Creedon J M. Relativistic Brillouin flow in the high γ diode[J]. *J Appl Phys*, 1975, **46**(7):2946—2955.
 [4] Bergeron K D, Poukey J W. Relativistic space-charge flow in a magnetic field[J]. *Appl Phys Lett*, 1975, **27**(2):58—60.

- [5] 林其文, 王文斗, 谢卫平等. 圆柱和平板磁绝缘传输线的横向空间电荷流[J]. 强激光与粒子束, 2003, 15(8): 809—812. (Lin Q W, Wang W D, Xie W P, et al. Transverse space-charge flow in planes and cylinders magnetically insulated transmission lines. *High Power Laser and Particle Beams*, 2003, 15(8): 809—812)

Transverse space-charge flow in magnetically insulated conical transmission lines

LIN Qi-wen, WANG Wei-dou, XIE Wei-ping, WANG Qiang

(Laboratory for Shock Wave and Detonation Physics Research, Institute of Fluid Physics,
CAEP, P. O. Box 919-105, Mianyang 621900, China)

Abstract: Electromagnetic field theory and electron motion conservation equations are used to derive numerical model of transverse space-charge flow and magnetically insulated critical condition in conical transmission lines. Through numerical calculation, we have discussed the influence of the voltage and the cone's geometrical parameters on the transverse space-charge flow and magnetically insulated performances. The higher the voltage is, the larger the space-charge flow without magnetic field, and the better magnetically insulated performances. The geometrical factor K in the three geometrical parameters of the lines has the greatest influence on the transmission performances.

Key words: Cone; Magnetically insulated transmission lines; Transverse space-charge flow; Magnetically insulated critical condition