

水动力学模型卡尔曼滤波实时校正技术

葛守西, 程海云, 李玉荣

(长江水利委员会 水文局, 湖北 武汉 430010)

摘要: 本文采用卡尔曼滤波技术实现圣维南方程实时校正以提高水动力学模型应用于洪水预报的精度水平。首先利用有限差分方法将圣维南方程进行离散化并线性化, 选择不同的状态变量组建了三种卡尔曼滤波状态空间方程, 对预报进行实时校正。选择长江干流清溪场至万县河段进行试算, 证实此方法对提高预报精度的效果显著。

关键词: 水动力学模型; 卡尔曼滤波; 实时校正; 状态向量

中图分类号: TV131.2 **文献标识码:** A

水动力学模型应用于洪水预报, 主要解决水文学方法无法解决或解决得不甚理想的一些课题。例如: 复杂水情、分汊水系及分洪、溃口等预报对象, 以及河道断面特征发生了明显变化后的水力要素计算; 尤其当需要计算河道内任何断面任何时刻的水位、流量等要素时, 水动力学模型通常为首选方法。多年来, 国内外学者对水动力学模型应用于洪水预报开展了大量研究, 然而, 由于其预报精度不甚理想, 长期以来未能在实时作业预报中得以广泛应用。如何通过实时校正来提高预报精度成为一个重要的课题。实时校正技术首推卡尔曼滤波, 国内外在流域洪水预报方面应用卡尔曼滤波的研究不少, 而将其与水动力学模型联合应用尚属空白, 本文对此课题作初步探讨。

1 圣维南方程的离散化和线性化

扩展的圣维南方程由连续方程和动量方程组成

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{B} L_q \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + S_f \right) = 0 \quad (2)$$

式中: S_f 为水力比降, $S_f = \frac{n^2 Q |Q|}{A^2 R^{4/3}}$ 或 $S_f = \frac{Q |Q|}{K^2}$, 其中 R 为水力半径, n 为曼宁阻力系数, K 为流量模数。

采用Prei ssmann四点隐式差分格式对连续方程和动量方程进行时间(i)和空间(j)的离散化。并令 $f^{i+1} = f^i + \Delta t \cdot f$ (f 代表因变量), 对差分方程进行幂级数展开并线性化, 则对于 j 河段的连续方程和动量方程分别简化为

收稿日期: 2004-08-22

基金项目: 国家自然科学基金重大项目(50099620)

作者简介: 葛守西(1941-), 男, 浙江嘉兴人, 教授级高级工程师, 从事水文预报研究。

E-mail: gesx@cjh.com.cn

2.1 以观测变量为状态向量 选择1~N个断面的水位、流量(系统输入输出变量)为状态向量 x_t 并与观测向量 y_t 同形,即:

$$y_t = x_t = [Z_1 Q_1 Z_2 Q_2 \dots Z_N Q_N]^T \quad (8)$$

则:

$$y_{t+1} = [Z_1^{t+1} Q_1^{t+1} Z_2^{t+1} Q_2^{t+1} \dots Z_N^{t+1} Q_N^{t+1}]^T \quad (9)$$

式(7)可记为 $x_{t+1} - x_t = E_t$, 移项加噪声得状态方程

$$x_{t+1} = x_t + E_t + \omega_t \quad (10)$$

观测方程为

$$y_t = x_t + v_t \quad (11)$$

这就构成了非马尔可夫形式^[2]的状态空间方程,其中状态转移阵、观测矩阵皆为单位阵, ω_t 、 v_t 分别为模型误差向量和观测误差向量。使用式(10)、(11)即可调用正规卡尔曼滤波器,进行滤波的结果是校正模型和观测两种噪声(误差),使 x_t 逐步逼近真值,达到提高精度的目的。相应的5个卡尔曼滤波递推公式为

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t-1|t-1} + \Phi_t^{-1} E_t + \omega_t \quad (12)$$

$$P_{t|t-1} = P_{t-1|t-1} + \Phi_t^{-1} Q_{t-1} \Phi_t^{-T} \quad (13)$$

$$K_t = P_{t|t-1} [P_{t|t-1} + R_t]^{-1} \quad (14)$$

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t-1|t-1} + K_t [y_t - \hat{x}_{t-1|t-1}] \quad (15)$$

$$P_{t|t} = [I - K_t] P_{t|t-1} \quad (16)$$

根据已知的初始状态向量按顺序带入以上公式便可实现卡尔曼滤波的校正计算。

2.2 以糙率为状态向量 糙率参数 n 是水动力学模型的关键参数,其变化对计算、预报结果有很大影响。但以糙率作为状态向量实现卡尔曼滤波却非常困难。通过对需求的反复分析,在使用糙率系数作为状态向量后,状态方程只能采用随机游动的形式实现状态转移。观测方程就必须承担水动力学模型依据糙率来计算各断面水位、流量的全部任务。也就是说,状态空间方程形式应表达为

$$n_{t+1} = n_t + W_t \quad (17)$$

$$y_t = f(n_t) + v_t \quad (18)$$

式中: n 为糙率,最简单的处理是全河段用一个变量值(随时间变化); $f(n_t)$ 是糙率的非线性隐函数,实施滤波的关键是对 $y_t = f(n)$ 进行显式表达。

令观测向量 $y_t = [Z_1 Q_1 \dots Z_N Q_N]^T$,则

$$y_t = \Phi_t^{-1} \cdot E_t \quad (19)$$

式中： f 和 E 都是 n 的非线性函数。

在运用卡尔曼滤波技术时首先需对 $f(n)$ 线性化，而对于包含逆矩阵的函数矩阵进行求导极为困难，只有该方阵是对角阵时，可以直接用函数表达，否则用伴随矩阵的方法很难对逆矩阵进行求导的解析分析。其难点是避免在线性化过程中出现非对角函数矩阵求逆运算。

若考虑糙率 n 随断面变化、又随水位级等因素变化， n 的函数形式也需显式表达才能进行 $f(n)$ 线性化处理，这是迄今尚未解决的困难问题。目前 n 沿程变化和随水位变化的表达形式只是离散化的数值关系，还不能表达为显式函数，因而不能满足实施卡尔曼滤波的要求，这是另一难点。因此，为了使用糙率作为状态向量，必须对问题进行简化处理。这种处理可以有许多的出发点和途径。

研究中探讨了显式差分格式和隐式差分格式两种滤波方程的建立，由于隐式差分格式公式推导和表达相当繁杂，为节省篇幅本文只对显式差分格式滤波方程建立过程作简单介绍，而将两者滤波计算结果列出。

当以全河段单一糙率 n 作为状态向量（一维），以各断面的水位、流量的涨差作为观测向量时，状态方程为

$$X_{t+1} = X_t + W_t \quad (20)$$

该方程与式(18)组成以糙率为状态向量的状态空间，其中，状态转移矩阵 A 为单位阵，而

$$X_t = n_t \quad (21)$$

$$y_t = [Z_1, Q_1, \dots, Z_N, Q_N]^T \quad (22)$$

其中， y_t 为 $2N$ 维向量 Z_i, Q_i 分别为第 i 个断面的水位、流量的时段涨差。

采用两个简化假定来实现式(18)的显式表达式推导：

(1)假定采用显式差分格式，差分格式权重系数^[1] $\alpha = 0$ ，以此简化差分方程。

(2)假定相邻断面间水位、流量的涨差之间成线性关系，即：

$$Z_{j+1} = a \cdot Z_j + b, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (23)$$

$$Q_{j+1} = c \cdot Q_j + d, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (24)$$

此条件在求解水动力学差分方程时，在处理边界条件中普遍采用。从多年洪水预报实践看，在渐变非恒定流状态下，当河段间距不大时，相当接近于洪水的实际情况，误差不大。

由上述假定，式(3)、式(4)简化为

$$Z_j + Z_{j+1} = G_j \quad (25)$$

$$Q_j + Q_{j+1} = G_j \quad (26)$$

其中：
$$G_j = -\frac{4\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{Q_{j+1} - Q_j}{B_{j+1} - B_j};$$

$$G'_j = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[2(Q_{j+1} - Q_j) \left(\frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j}{A_j} \right) - (A_{j+1} - A_j) \left(\frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^2} + \frac{Q_j^2}{A_j^2} \right) + g(Z_{j+1} - Z_j) \cdot (A_{j+1} - A_j) \right] - g\Delta t (Sf_{j+1}A_{j+1} + Sf_jA_j)$$

G_j 是糙率系数的隐函数，通过推导显式表达为

$$G_j = U_{2j} - G_{2j}n^2; \tag{27}$$

$$\text{其中：} U_{2j} = \frac{-\Delta t}{\Delta x} \left[2(Q_{j+1} - Q_j) \left(\frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j}{A_j} \right) - (A_{j+1} - A_j) \left(\frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^2} + \frac{Q_j^2}{A_j^2} \right) + g(Z_{j+1} - Z_j) \cdot (A_{j+1} - A_j) \right];$$

$$G_{2j} = \frac{g\Delta t Q_{j+1} |Q_{j+1}|}{A_{j+1} R_{j+1}^{4/3}} + \frac{g\Delta t Q_j |Q_j|}{A_j R_j^{4/3}}。 U_{2j} \text{和} G_{2j} \text{与} n \text{无关，是各断面水位、流量及断面几何特征的函数，可由}$$

已知值计算。

将式(23)、(24)代入式(25)、(26)得到

$$Z_j = F_j \tag{28}$$

$$Q_j = S_j - W_j n^2 \tag{29}$$

$$\text{其中：} F_j = \frac{G_j - b}{1 + a}, S_j = \frac{U_{2j} - b}{1 + c}, W_j = \frac{G_{2j}}{1 + c}。$$

式(28)、(29)即完成了对观测向量 y_t 的显式表达，即

$$y_t = [F_1, S_1 - W_1 n^2, \dots, F_j, S_j - W_j n^2, \dots, F_N, S_N - W_N n^2]^T \tag{30}$$

观测方程(18)线性化为

$$y_t = f(x_t) + \frac{\partial y_t}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{t|t-1}} \cdot (x_t - \hat{x}_{t|t-1}) = H_t x_t + B_t \tag{31}$$

$$\text{其中：} H_t = \frac{\partial y_t}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{t|t-1}} = [0, -2w_1 n_t, \dots, 0, -2w_N n_t]^T ;$$

$$B_t = f(x_t) - \frac{\partial y_t}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{t|t-1}} \cdot \hat{x}_{t|t-1} = \begin{bmatrix} F_1 \\ s_1 - w_1 x_1^2 \\ \vdots \\ F_n \\ S_N - W_N n_t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2w_1 n_t^2 \\ \vdots \\ 0 \\ -2w_N n_t^2 \end{bmatrix} \cdot \hat{x}_{t|t-1}。$$

对于线性化后的状态方程式(20)和(31)形成了非马尔可夫状态空间,采用式(12)~(16)便可实现卡尔曼滤波对糙率 n 的校正。由于显式差分格式的使用,使得滤波模型的建立被大大简化。

2.3 以综合变量为状态向量 观察式(7)向量 E ,它由 G_j 和 G_{j-1} 所组成,而这些变量不仅受各断面的水位、流量的影响,也受糙率的影响,是一组反映二者影响综合结果的变量,本文称作综合变量。利用线性化后差分方程结构简洁的优势,同时在考虑对糙率系数进行校正(从综合效果上体现)时,不致出现模型结构复杂化的不利局面,沿此思路,构造了以综合变量为状态向量的滤波模型。

令状态向量为

$$X_t = [G_0, G_1, G_2, \dots, G_{N-1}, G_N]^T \quad (32)$$

令观测向量为

$$y_t = [Z_1, Q_1, \dots, Z_{N-1}, Q_{N-1}]^T \quad (33)$$

状态空间方程记为

$$X_{t+1} = AX_t + \epsilon_t \quad (34)$$

观测方程记为

$$y_t = H_t X_t + v_t \quad (35)$$

其中: $A=I$ 为单位阵,即使用随机游动状态方程, $H_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 阵即式(7)所表达的系数矩阵,为时变矩阵,但它可以用逐时段的已知水位、流量进行计算。 ϵ_t 、 v_t 分别为模型误差向量和观测误差向量,均为白噪声。

对式(34)、(35)使用式(12)~(16)就可以实现滤波,显然,它的形式简洁,使用方便,唯其实时校正的能力有待检验。

3 试验研究

3.1 试验河段和目标函数 长江干流清溪场—万县河段河长近200km,其间有清溪场、万县水文站和忠县水位站,河段内共选用了21个断面,断面平均间隔10km左右,试验河段示意图如图1。

试验洪水资料采用1981年7月10日8时~7月25日8时共15d洪水过程进行计算。本次洪水主要以上游来水为主,区间没有降雨洪水加入,对于无旁侧入流影响的水动力学模型很适用。

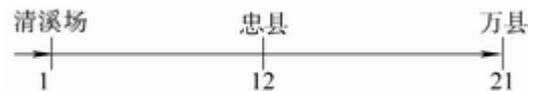


图1 实时校正试验河段示意

糙率系数为一维水动力学模型唯一参数,该参数采用重庆~宜昌河段1981年、1982年多场洪水资料率定而得,作为本次研究对比分析的基础,称“原模型”。

在试验河段模型计算中,清溪场、万县分别以上、下边界进入计算,而居于河段中央的忠县站是预报效果的主要体现者,且忠县站水位具有实际观测值,没有插补误差,故选择忠县站水位一步或多步预报平均绝对误差作为目标函数,用以平行对比各种算法误差的大小。

3.2 滤波参数的实验研究 R^+ 、 Q^+ 阵是滤波器设计的关键参数,卡尔曼滤波技术在用于洪水预报时往往存在着参数难以确定的问题。本次各试验方案设计的状态空间观测向量和状态向量多不是一维向量,这在

卡尔曼滤波应用于水文学方面是很少有的, 复杂的状态空间给参数的初值设置带来了更大的困难。另外, 观测向量同时包含水位和流量两个指标变量, 在参数的选择上它们对应的观测误差的数量级相差甚远, R^* 、 Q^* 阵的选择是比较困难的。只有通过试验摸索规律, 来进行 R^* 、 Q^* 参数的选择。

由于水动力学模型的观测误差协方差阵 R^* 代表观测误差的方差值, 根据在一般性汇流模型应用卡尔曼滤波的经验^[2], 如果预报对象是水位, 则 \hat{r} (R^* 阵元素值) 的选择范围大约在 0.0001 ~ 0.0025 之间, 如果预报对象为流量, 则可令:

$$\hat{r} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \left(0.05 y_i - \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P 0.05 y_i \right)^2 \quad (36)$$

式中: $\{y_i\}$, $i=1 \sim P$ 是率定期(长度 P) 的预报对象流量资料。 \hat{r} 的选择范围可以限定为: $0.2 \hat{r} \sim 3 \hat{r}$ 。借鉴经验, 研究中对 Q^* 、 R^* 进行了定常参数的选择试验, 首先规定 $P_{0|0}$ 、 R^* 、 Q^* 阵的型式, 然后进行不同数值组合的试验。

借鉴以往卡尔曼滤波技术应用于洪水预报中参数选择经验, 并通过多次的试验验证, 最后发现当预测误差协方差阵 $P_{0|0}$ 、模型误差协方差阵 R^* 、观测误差协方差阵 Q^* 分别取

$$P_{0|0} = \begin{bmatrix} p & & 0 \\ & p & \\ 0 & \cdots & p \end{bmatrix} \quad R^* = \begin{bmatrix} r_{i,j} & & 0 \\ & r_{i,j} & \\ 0 & \cdots & r_{i,j} \end{bmatrix} \left(r_{ij} = \begin{cases} r_1, i \text{ 为奇数} \\ r_2, i \text{ 为偶数} \end{cases} \right) \quad Q^* = \begin{bmatrix} q & & -q \\ & q & \\ -q & \cdots & q \end{bmatrix}$$

结构形式时, 滤波结果较好, 其中对于模型误差协方差阵对角线元素则考虑了状态向量同时包括水位和流量的因素进行不同取值试验。

3.3 一步外推预报 对于前述 3 种状态空间模型, 使用卡尔曼滤波技术对水动力学模型进行实时校正, 一步外推预报目标函数均比原模型(原水动力学模型)预报结果有明显下降, 其预报结果参见表 1。

表 1 不同状态向量卡尔曼滤波计算结果对比

方案 (状态向量)	滤波器参数				一步预报目标函数/m	
	R^*	Q^*	P_0	K_k	平均绝对误差	平均偏差
观测变量	$r_1=0.02$ $r_2=100$	$q=100$	$p=10^3$		0.0817	
糙率 (显式模型)	$r_1=0.0004$ $r_2=4000$	$q=0.01$	$p=10^{-8}$	$k=0$	0.01131	0.00271
糙率 (隐式模型)	$r_1=0.0004$ $r_2=4000$	$q=0.01$	$p=10^{-8}$	$k=0$	0.01744	0.00197
综合变量	$r_1=0.0004$ $r_2=4 \times 10^6$	$q=100$	$P=100$		0.00244	-0.00006
原模型对照					0.09853	0.09853

由表中数据可知, 以综合变量为状态向量的状态空间方程应用卡尔曼滤波效果最好, 平均一步外推预报误差 0.00244m, 比原模型误差下降 97.5%。而以糙率系数为状态向量的方案中, 由于糙率系数数量级较

小,其微小变化在计算中被放大了许多倍,对于保持系统滤波的稳定性极为不利,只有采用常增益滤波技术才能防止计算发散。

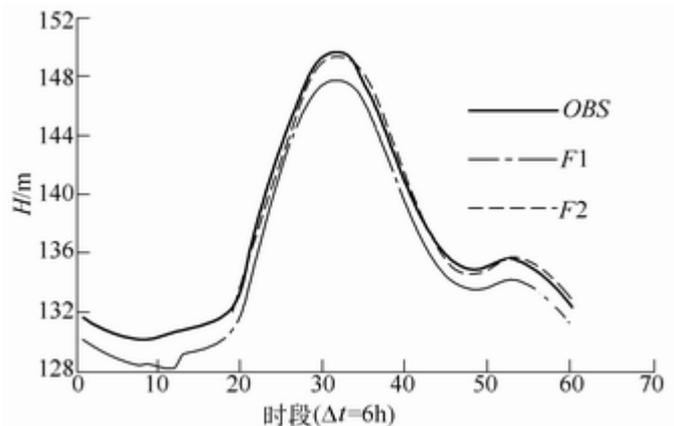
3.4 多步外推预报 本次试验在卡尔曼滤波一步外推预报的基础上,以外推预报效果最好的综合校正方法为例,还试验了多步外推预报的实时校正效果,并将多步外推预报结果和原模型多步预报成果进行了平行对比,对比结果见表2。其中将原水动力学模型和综合变量校正卡尔曼滤波模型6h外推预报结果进行对比,对比结果参见图2。

表2 综合变量校正模型滤波多步预报成果对比

预报步数	方法	预报次数	目标函数/m	误差下降幅度(%)
1h(4步)	1	286	0.34785	94.4
	2	286	0.00904	
2h(8步)	1	143	0.64757	92.0
	2	143	0.05176	
6h(12步)	1	47	1.19117	63.5
	2	47	0.43533	

注:方法1表示原水动力学模型,方法2表示综合变量校正卡尔曼滤波模型

3.5 结果分析 由不同状态空间的滤波模型与原模型一步递推预报比较可见,预报平均误差均有明显下降。对于效果最好的综合变量状态方程,多步外推预报平均误差有大幅度的下降,其中1h、2h、6h预报平均绝对误差分别下降94.4%、92.0%、63.5%,预报精度明显提高。可见,卡尔曼滤波能够有效地降低预报的误差。然而从表2数据可见,本模型随着外推步数的增加,误差上升较快,这对推算长时段的预报不利。究其原因,长时段外推预报的效果主要取决于系统数学模型本身的优劣,实时校正技术只能起有限的间接作用,实时校正要想发挥长效作用,仍需深入研究对模型参数的有效校正。



(OBS为实测水位, F1表示原模型预报, F2卡尔曼综合校正滤波模型预报)

图2 “81.7”洪水忠县水位6h实时外推预报过程线

4 结语

本文研究了水动力学模型应用卡尔曼滤波技术进行实时校正预报的可行性。分别试验了以观测变量、糙率和综合变量为状态向量的卡尔曼滤波模型,并对卡尔曼滤波器参数的确定进行了试验,试验提出了滤波器参数的最优结构形式和参数值;此模型在长江干流清溪场至万县河段进行试验,以忠县实时预报外推一步和多步预报水位平均绝对误差为目标函数,预报平均绝对误差明显下降,预报精度有较大提高,试验取得了预期的效果。它表明,运用卡尔曼滤波技术可以使水动力学模型参数动态化和实现预报实时校正。初步试验成果显示,本课题的研究具有广阔的前景。

参考文献：

- [1] 周雪漪. 计算水力学[M]. 北京：清华大学出版社，1995.
- [2] 葛守西. 现代洪水预报技术[M]. 北京：中国水利水电出版社，2002.

Real time updating of hydrodynamic model by using Kalman filter

GE Shou-xi, CHEN Hai-yun, LI Yu-rong

(Bureau of Hydrology, Changjiang Water Resources Committee, Wuhan 430010, China)

Abstract: The Kalman filter was applied to realize the real time updating of Saint-Venant equation for promoting the accuracy of flood forecasting. The discretization and linearization of Saint-Venant equation were carried out by means of finite difference method. Three kinds of kalman filter spatial equation were established by using different state variables for real time updating. The calculation of flood forecasting for river section from Qingxichang to Wanxian of Yangtze River verifies that the proposed method can remarkably promote the accuracy of forecasting.

Key words: hydrodynamic model; Kalman filter; real time updating; state variables