第51卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.51, No.2
2008年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2008

文章编号: 0583-1431(2008)02-0335-08 **文献标识码: A**

算子矩阵的亚循环性

曹小红

陕西师范大学数学与信息科学学院 西安 710062
E-mail: xiaohongcao@snnu.edu.cn

摘 要 讨论了亚循环算子和具有拓扑一致降标的算子之间的关系, 同时研究了算子矩阵的亚循环性和超循环性.

关键词 拓扑一致降标; 亚循环算子; 超循环算子
MR(2000) 主题分类 47A15, 47A53, 47A55
中图分类 O177.2

Hypercyclicity for Operator Matrices

Xiao Hong CAO

College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062*, P. R. China*
E-mail: xiaohongcao@snnu.edu.cn

Abstract The relation between hypercyclic operators and the operators which have topological uniform descent is discussed. Also, we explore the hypercyclicity and the supercyclicity for operator matrices.

Keywords topological uniform descent; hypercyclic operator; supercyclic operator
MR(2000) Subject Classification 47A15, 47A53, 47A55
Chinese Library Classification O177.2

1 预备知识

在本文中, H 和 K 表示复可分的无限维的 Hilbert 空间, $B(H,K)$ 表示 H 到 K 上的有界线性算子的全体, 简写 $B(H,H)$ 为 $B(H)$. 若 $A\in B(H)$, 用 $N(A)$ 和 $R(A)$ 分别表示 A 的零空间和值域; $\sigma(A)$ 表示 A 的谱集. 算子 $A\in B(H)$ 称为是上半 Fredholm 算子若 $R(A)$ 闭且 $\dim N(A)<\infty$, 若 $R(A)$ 有有限维的余维数, 即 $\dim H/R(A)<\infty$, $A\in B(H)$ 称为是一个下半 Fredholm 算子. 我们称 $A\in B(H)$ 为 Fredholm 算子若 $R(A)$ 的余维数有限且 A 有有限维的零空间. 若 A 为上半 Fredholm 算子或者下半 Fredholm 算子, A 的指标 $\operatorname{ind}(A)$ 定义为 $\operatorname{ind}(A)=\dim N(A)-\dim H/R(A)$. 集合 $SF_+^-(H)$ 表示为 $SF_+^-(H)=\{A\in B(H), A$ 为上半 Fredholm 算子且 $\operatorname{ind}(A)\le 0\}$. 算子 A 的升标, asc (A), 为满足 $N(A^n)=N(A^{n+1})$ 的最小的非负整数 n, A 的降标 $\operatorname{des}(A)$, 为满足 $R(A^n)=R(A^{n+1})$ 的最小非负整数 n. 算子 A 称为是 Weyl 算子若它为指标为零的 Fredholm 算子, A 称为是 Browder 算子若 A 为具有有限升标和有限降标的 Fredholm 算子. 算子 A 的本质谱 $\sigma_e(A)$、Weyl 谱 $\sigma_w(A)$、Browder 谱 $\sigma_b(A)$、上 (下) 半

收稿日期: 2006-12-06; 接受日期: 2007-07-25
基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目

Fredholm 谱 $\sigma_{SF_+}(A)$ ($\sigma_{SF_-}(A)$) 定义为

$$\sigma_e(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}: A-\lambda I \text{ 不为 Fredholm 算子}\};$$
$$\sigma_w(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}: A-\lambda I \text{ 不为 Weyl 算子}\};$$
$$\sigma_b(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}: A-\lambda I \text{ 不为 Browder 算子}\};$$
$$\sigma_{SF_+}(A)=\{\ \lambda\in\mathbb{C}: A-\lambda I \text{ 不为上半 Fredholm 算子}\};$$
$$\sigma_{SF_-}(A)=\{\ \lambda\in\mathbb{C}: A-\lambda I \text{ 不为下半 Fredholm 算子}\}.$$

设 $x\in H$, x 在算子 A 下的轨道 $\mathrm{Orb}\,(A,x)$ 定义为:

$$\mathrm{Orb}\,(A,x)=\{x,Ax,A^2x,\ldots\}.$$

向量 $x\in H$ 称为是一个超循环向量若 $\mathrm{Orb}\,(A,x)$ 的数乘构成的集合在 H 中稠密, x 称为是亚循环向量若 $\mathrm{Orb}\,(A,x)$ 在 H 中稠. 若算子 A 具有亚循环 (超循环) 向量, 则称 A 为亚循环 (超循环) 算子. 我们用 $HC(H)$ ($SC(H)$) 表示 $B(H)$ 中亚循环 (超循环) 算子的全体; $\overline{HC(H)}$ ($\overline{SC(H)}$) 为 $HC(H)(SC(H))$ 的范数闭包. 超循环算子是由 Hilden 和 Wallen 在 1974 年介绍的 [1]; 关于亚循环算子和超循环算子的许多重要的理论是由 Kitai [2] 给出的.

本文第二部分研究了亚 (超) 循环算子和具有拓扑一致降标的算子之间的关系; 第三部分研究了算子矩阵的亚循环性和超循环性.

2 算子 A 的亚循环性和超循环性

设 $A\in B(H)$, 对每一个非负整数 n, A 诱导出了向量空间

$$R(A^n)/R(A^{n+1}) \ \ \text{到} \ \ R(A^{n+1})/R(A^{n+2})$$

的一个线性变换 $\hat{A}$. 用 $k_n(A)$ 表示 $\hat{A}$ 的零空间, 令 $k(A)=\sum_{n=0}^{\infty}k_n(A)$. 下面的定义描述了我们即将要研究的算子, 这些定义是由 Grabiner 在文 [3] 中给出的.

定义 2.1 若存在非负整数 d, 使得当 $n\geq d$ 时, $k_n(A)=0$, 我们称当 $n\geq d$ 时, A有一致降标.

定义 2.2 设存在非负整数 d, 使得当 $n\geq d$ 时, A 有一致降标. 若当 $n\geq d$ 时, $R(A^n)$ 在 $R(A^d)$ 的算子值域拓扑中闭, 则称 A 有拓扑一致降标.

可以证明当 A 为半 Fredholm 算子时, A 有拓扑一致降标. 令

$$TUD(A)=\{\lambda\in\mathbb{C},\ A-\lambda I \text{ 有拓扑一致降标}\}.$$

若 A 有拓扑一致降标, 则 A 有性质 (见文 [3], 推论 4.9):

引理 2.3 设 $A\in B(H)$, λ 为 A 的谱集的边界点. 若 $A-\lambda I$ 有拓扑一致降标, 则 λ 为 A 的一个极点.

下面我们给出本质逼近点谱的一个变化. 设

$$\rho_1(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}, \dim N(A-\lambda I)<\infty \text{ 且存在 } \epsilon>0, \text{使得当 } 0<|\mu-\lambda|<\epsilon \text{ 时}, A-\mu I\in SF_+^-(H)\},$$

令 $\sigma_1(A)=\mathbb{C}\backslash\rho_1(A)$. 显然, $\sigma_1(A)\subseteq\sigma_w(A)$.

下面的引理给出了亚循环算子和超循环算子的本质的性质, 我们主要利用这些性质来证明本文的主要结论 (见文 [4], 定理 2.1 和定理 3.3).

引理 2.4 $\overline{HC(H)}$ 是由满足下列条件的算子 $A\in B(H)$ 构成的集合:

(1) $\sigma_w(A) \cup \partial\mathrm{D}$ 连通;

(2) $\sigma(A)\backslash\sigma_b(A) = \emptyset$;

(3) 任给 $\lambda \in \rho_{SF}(A)$, $\mathrm{ind}(A-\lambda I) \geq 0$, 其中 $\rho_{SF}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A-\lambda I$为半 Fredholm 算子$\}$.

引理 2.5 $\overline{SC(H)}$ 是由满足下列条件的算子 $A \in B(H)$ 构成的集合:

(1) 存在 $r \geq 0$, 使得 $\sigma(A) \cup \partial(r\mathrm{D})$ 连通;

(2) 存在 $r \geq 0$, 使得 $\sigma_w(A) \cup \partial(r\mathrm{D})$ 连通;

(3) $\sigma(A)\backslash\sigma_b(A) = \emptyset$ 或者存在 $\alpha \neq 0$, 使得 $\sigma(A)\backslash\sigma_b(A) = \{\alpha\}$.

(4) 任给 $\lambda \in \rho_{SF}(A)$, $\mathrm{ind}(A-\lambda I) \geq 0$.

定理 2.6 设 $TUD(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_1(A)$.

(1) 若 $\sigma(A) \cup \partial\mathrm{D}$ 连通, 则 $A \in \overline{HC(H)}$;

(2) 若存在 $r \geq 0$, 使得 $\sigma(A) \cup \partial(r\mathrm{D})$ 连通, 则 $A \in \overline{SC(H)}$.

证明 (1) 设 $\sigma(A) \cup \partial\mathrm{D}$ 连通.

(i) $\sigma_w(A) = \sigma(A)$, 则 $\sigma_w(A) \cup \partial\mathrm{D}$ 连通.

事实上, 设 $A-\lambda I$ 为 Weyl 算子. 则 $\lambda \in TUD(A)\backslash\sigma_1(A)$, 这意味着 $A-\lambda I$ 为可逆.

(ii) 由于 $\sigma_w(A) \subseteq \sigma_b(A)$, 则 $\sigma(A) = \sigma_b(A)$.

(iii) 任给 $\lambda \in \rho_{SF}(A)$, $\mathrm{ind}(A-\lambda I) \geq 0$.

事实上, 若存在 $\lambda \in \rho_{SF}(A)$, 使得 $\mathrm{ind}(A-\lambda I) < 0$, 则 $\lambda \in TUD(A)\backslash\sigma_1(A)$. 于是 $A-\lambda I$ 可逆, 则 $\mathrm{ind}(A-\lambda I) = 0$. 与假设 $\mathrm{ind}(A-\lambda I) < 0$ 矛盾.

由引理 2.4 可得 $A \in \overline{HC(H)}$.

类似地, 可以证明超循环的情形.

推论 2.7 设 $TUD(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_1(A)$. 若 $\sigma(A) = \sigma_{SF_-}(A)$ 且 $\sigma(A) \cup \partial\mathrm{D}$ 均连通, 则 $A \in \overline{HC(H)}$ 且 $A^* \in \overline{HC(H)}$.

$H(A)$ 表示在 $\sigma(A)$ 的一个邻域上解析并且在 $\sigma(A)$ 的任意分支上不为常值的复值函数的全体. 设 $TUD(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_1(A)$. 由定理 2.6 的证明我们知道对任意的 $f \in H(A)$, 有 $\sigma_w(f(A)) = f(\sigma_w(A))$ (见文 [5], 定理 5). 设 $f \in H(A)$ 满足: 存在 $\lambda_0 \in \sigma(A)$, 使得 $|f(\lambda_0)| = 1$ 且 $\sigma(f(A))$ 连通. 由于 $\sigma(A) = \sigma_w(A)$, 于是

$$\sigma_w(f(A)) = f(\sigma_w(A)) = f(\sigma(A)) = \sigma(f(A)) \ \text{连通且}\ f(\lambda_0) \in \sigma_w(f(A)) \cap \partial\mathrm{D}.$$

又因为 $\sigma_w(f(A))$ 和 $\partial\mathrm{D}$ 连通, 于是 $\sigma_w(f(A)) \cup \partial\mathrm{D}$ 连通. 由引理 2.4, 我们知道 $f(A) \in \overline{HC(H)}$, 这样我们得到结论:

推论 2.8 设 $TUD(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_1(A)$.

(1) 设 $f \in H(A)$ 满足: 存在 $\lambda_0 \in \sigma(A)$, 使得 $|f(\lambda_0)| = 1$ 且 $\sigma(f(A))$ 连通, 则 $f(A) \in \overline{HC(H)}$;

(2) 若 $f \in H(A)$ 满足 $\sigma(f(A))$ 连通, 则 $f(A) \in \overline{SC(H)}$.

3 2×2 上三角算子矩阵的亚循环性

对上三角算子矩阵的研究是由下列的事实自然想起的: 若 A 是一个 Hilbert 空间上的算子, M 为 A 的一个闭的不变子空间, 则 A 可以表示成为一个 2×2 的上三角算子矩阵

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : M \oplus M^{\perp} \longrightarrow M \oplus M^{\perp},$$

研究算子矩阵的一个方法是根据该矩阵对角元的性质来看整个矩阵的性质. 近几年来, 有许多数学工作者在研究上三角算子矩阵, 例如文 [6–7]. 设 $A \in B(H)$ 和 $B \in B(K)$, 我们用 M_C 表示一个作用在 $H \oplus K$ 上的算子

$$M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 $C \in B(K,H)$. 若 $C = 0$, 令 $M_0 = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$. 本节利用新的谱集 $\sigma_1(\cdot)$ 和拓扑一致降标, 我们研究了 2×2 算子矩阵的亚循环性和超循环性. 设 $\rho_b(A) = \mathbb{C} \backslash \sigma_b(A)$. 首先给出下列结论:

定理 3.1 设 $A \in B(H)$ 满足 $TUD(A) \subseteq \rho_b(A) \cup \sigma_1(A)$, $B \in B(K)$,

(1) 若存在 $C_0 \in B(K,H)$, 使得 $\left(\begin{smallmatrix} A & C_0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \in \overline{HC(H \oplus K)}$, 则对任意的 $C \in B(K,H)$, 都有

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \overline{HC(H \oplus K)};$$

(2) 若存在 $C_0 \in B(K,H)$, 使得 $\left(\begin{smallmatrix} A & C_0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \in \overline{SC(H \oplus K)}$, 则对任意的 $C \in B(K,H)$, 都有

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \overline{SC(H \oplus K)}.$$

证明 分三步来证明 (1).

(i) 对任意 $C \in B(K,H)$, $\sigma_w(M_C) = \sigma_w(M_{C_0})$. 于是 $\sigma_w(M_C) \cup \partial \mathrm{D}$ 连通.

事实上, 设 $M_C - \lambda_0 I$ 为 Weyl 算子, 由

$$M_C - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B - \lambda_0 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda_0 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

我们知道 $A-\lambda_0 I$ 为上半 Fredholm 算子, $B-\lambda_0 I$ 为下半 Fredholm 算子, 且 $A-\lambda_0 I$ 为 Fredholm 算子当且仅当 $B-\lambda_0 I$ 为 Fredholm 算子. 由于 $A-\lambda_0 I$ 为上半 Fredholm 算子, 则 $\lambda_0 \in TUD(A) \subseteq \rho_b(A) \cup \sigma_1(A)$. 由 $\rho_1(A)$ 的定义, 得到 $\mathrm{ind}(A-\lambda_0 I) \geq 0$, 这就意味着 $A-\lambda_0 I$ 为 Fredholm 算子. 于是 $B-\lambda_0 I$ Fredholm 算子, 因此

$$\mathrm{ind}(M_{C_0} - \lambda_0 I) = \mathrm{ind}(A - \lambda_0 I) + \mathrm{ind}(B - \lambda_0 I) = \mathrm{ind}(M_C - \lambda_0 I) = 0.$$

则 $M_{C_0} - \lambda_0 I$ 为 Weyl 算子. 这样就有 $\sigma_w(M_C) = \sigma_w(M_{C_0})$. 所以 $\sigma_w(M_C) \cup \partial \mathrm{D}$ 是连通的.

(ii) 对任意的 $C \in B(K,H)$, 都有 $\sigma(M_C) = \sigma_b(M_C)$.

设 $M_C - \lambda_0 I$ 为 Browder 算子. 由上面的证明知 $A - \lambda_0 I$ 为 Fredholm 算子且有有限的升标, 并且 $B - \lambda_0 I$ 为 Fredholm 算子且有有限的降标. 由 $A - \lambda_0 I$ 为 Fredholm 算子且有有限的升标知 $\mathrm{ind}(A - \lambda_0 I) \leq 0$. 于是 $\lambda_0 \in TUD(A) \backslash \sigma_1(A)$, 这意味着 $A - \lambda_0 I$ 为 Browder 算子. 由于 $M_C - \lambda_0 I$ 为 Browder 算子, 于是可得 $B - \lambda_0 I$ 为 Weyl 算子且有有限的降标, 则 $B - \lambda_0 I$ 为 Browder 算子, 所以 $M_{C_0} - \lambda_0 I$ 为 Browder 算子. 但是由于 $M_{C_0} \in \overline{HC(H \oplus K)}$, 则有 $M_{C_0} - \lambda_0 I$ 可逆. 于是 $A - \lambda_0 I$ 和 $B - \lambda_0 I$ 均可逆, 所以 $M_C - \lambda_0 I$ 可逆. 这样我们就证明了对任意的 $C \in B(K,H)$, $\sigma(M_C) = \sigma_b(M_C)$.

(iii) 对任意的 $C \in B(K,H)$, $\mathrm{ind}(M_C - \lambda I) \geq 0$, 其中 $\lambda \in \rho_{SF}(M_C)$.

若不然, 设 $\lambda_0 \in \rho_{SF}(M_C)$, 使得 $\mathrm{ind}(M_C - \lambda_0 I) < 0$, 则 $A - \lambda_0 I$ 为上半 Fredholm 算子. 于是 $\lambda_0 \in TUD(A) \subseteq \rho_b(A) \cup \sigma_1(A)$. 这样 $A - \lambda_0 I$ 为 Fredholm 算子. 由文 [6, 定理 2.1] 知 $B - \lambda_0 I$ 为上半 Fredholm 算子, 则 $M_{C_0} - \lambda_0 I$ 为上半 Fredholm 算子并且 $\mathrm{ind}(M_{C_0} - \lambda_0 I) = \mathrm{ind}(M_C - \lambda_0 I) < 0$. 这就与假设 $M_{C_0} \in \overline{HC(H \oplus K)}$ 矛盾.

由前面的证明, 我们知道对任意的 $C \in B(K,H)$, $M_C \in \overline{HC(H\oplus K)}$.

对超循环的情形, 我们有类似的证明.

推论 3.2 设 $TUD(A) \subseteq \rho_b(A) \cup \sigma_1(A)$ 且 $TUD(B) \subseteq \rho_b(B) \cup \sigma_1(B)$, 则下面的叙述等价:

(1) 对任意的 $C \in B(K,H)$, $M_C \in \overline{HC(H\oplus K)}$;

(2) 对任意的 $C \in B(K,H)$, $TUD(M_C) \subseteq \rho(M_C) \cup \sigma_1(M_C)$ 且 $\sigma(M_C) \cup \partial \mathrm{D}$ 连通;

(3) 存在 $C \in B(K,H)$, 使得 $M_C \in \overline{HC(H\oplus K)}$;

(4) 存在 $C \in B(K,H)$, 使得 $TUD(M_C) \subseteq \rho(M_C) \cup \sigma_1(M_C)$ 并且 $\sigma(M_C) \cup \partial \mathrm{D}$ 连通;

(5) $M_0 \in \overline{HC(H\oplus K)}$;

(6) $TUD(M_0) \subseteq \rho(M_0) \cup \sigma_1(M_0)$ 且 $\sigma(M_0) \cup \partial \mathrm{D}$ 连通.

证明 我们只需要证明 (1), (2), (5) 的等价性.

(1)$\Longrightarrow$(2) 设对任意的 $C \in B(K,H)$, $M_C \in \overline{HC(H\oplus K)}$. 令 $\lambda_0 \in TUD(M_C)\backslash\sigma_1(M_C)$, 则 $\dim N(M_C - \lambda_0 I) < \infty$ 且存在 $\epsilon > 0$, 使得当 $0 < |\lambda - \lambda_0| < \epsilon$ 时, $M_C - \lambda I$ 为上半 Fredholm 算子且 $\mathrm{ind}(M_C - \lambda I) \leq 0$. 由于当 $\mu \in \rho_{SF}(M_C)$ 时, $\mathrm{ind}(M_C - \mu I) \geq 0$. 我们知道当 $0 < |\lambda - \lambda_0| < \epsilon$ 时, $M_C - \lambda I$ 为 Weyl 算子. 由定理 3.1 的证明知, $A - \lambda I$ 和 $B - \lambda I$ 均为 Fredholm 算子. 因此 $\lambda \in TUD(A) \cap TUD(B)$. 由 $\sigma_1(\cdot)$ 的定义知 $\mathrm{ind}(A - \lambda I) \geq 0$ 且 $\mathrm{ind}(B - \lambda I) \geq 0$. 但是由于 $\mathrm{ind}(A - \lambda I) + \mathrm{ind}(B - \lambda I) = \mathrm{ind}(M_C - \lambda I) = 0$, 则有 $A - \lambda I$ 和 $B - \lambda I$ 均为 Weyl 算子. 于是

$$\lambda \in TUD(A)\backslash\sigma_1(A) \ \text{ 且 } \ \lambda \in TUD(B)\backslash\sigma_1(B).$$

这就意味着 $A - \lambda I$ 和 $B - \lambda I$ 均为 Browder 算子, 所以 $M_C - \lambda I$ 为 Browder 算子. $M_C \in \overline{HC(H\oplus K)}$ 的事实告诉我们 $M_C - \lambda I$ 是可逆的, 则 $\lambda_0 \in \mathrm{iso}\,\sigma(M_C) \cup \rho(M_C)$. 我们断言 $\lambda_0 \in \rho(M_C)$. 若不然, $\lambda_0 \in \mathrm{iso}\,\sigma(M_C)$, 由引理 2.3, λ_0 为 M_C 的一个极点. 设 asc $(M_C - \lambda_0 I) =$des$(M_C - \lambda_0 I) = p$, 则有分解

$$H \oplus K = N[(M_C - \lambda_0 I)^p] \oplus R[(M_C - \lambda_0 I)^p].$$

由于 $\dim N(M_C - \lambda_0 I) < \infty$, 于是 $M_C - \lambda_0 I$ 为 Browder 算子. 这就与事实 $\sigma(M_C) = \sigma_b(M_C)$ 矛盾. 于是一定有 $TUD(M_C) \subseteq \rho(M_C) \cup \sigma_1(M_C)$. 若 $M_C - \lambda I$ 为 Weyl 算子, 则有

$$\lambda \in TUD(M_C)\backslash\sigma_1(M_C) \subseteq \rho(M_C),$$

于是 $\sigma(M_C) = \sigma_w(M_C)$. 这样就有对任意的 $C \in B(K,H)$, $\sigma(M_C) \cup \partial \mathrm{D} = \sigma_w(M_C) \cup \partial \mathrm{D}$ 连通.

(2)$\Longrightarrow$(1) 由定理 2.6, 我们可得到结论.

(1)$\Longrightarrow$(5) 显然. 由定理 3.1, 我们知道反过来也成立.

设 $TUD(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_1(A)$ 且 $TUD(B) \subseteq \rho(B) \cup \sigma_1(B)$. 我们断言对任意的 $C \in B(K,H)$, $\sigma(M_C) = \sigma_w(M_C) = \sigma_w(M_0) = \sigma(M_0)$. 事实上, 若 $M_C - \lambda I$ 为 Weyl 算子, 由推论 3.2 的证明知 $A - \lambda I$ 和 $B - \lambda I$ 均为 Weyl 算子. 则 $\lambda \in TUD(A)\backslash\sigma_1(A)$ 且 $\lambda \in TUD(B)\backslash\sigma_1(B)$, 于是 $A - \lambda I$ 和 $B - \lambda I$ 均可逆. 因此

$$\sigma(M_C) = \sigma_w(M_C) = \sigma_w(M_0) = \sigma(M_0).$$

这样我们有下列结论:

推论 3.3 若 $TUD(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_1(A)$, 且 $TUD(B) \subseteq \rho(B) \cup \sigma_1(B)$, 则

(1) 对任意的 $C \in B(K,H)$, 都有 $M_C \in \overline{HC(H\oplus K)} \Longleftrightarrow$ 存在 $C_0 \in B(K,H)$, 使得 $\sigma(M_{C_0}) \cup \partial \mathrm{D}$ 连通;

(2) 对任意的 $C\in B(K,H)$, 都有 $M_C\in\overline{SC(H\oplus K)}\iff$ 存在 $C_0\in B(K,H)$ 以及存在 $r\geq 0$, 使得 $\sigma(M_{C_0})\cup\partial(r\mathrm{D})$ 连通.

类似于推论 2.8 以及定理 3.1 的证明, 我们可以证明下列结论:

推论 3.4 设 $TUD(A)\subseteq\rho(A)\cup\sigma_1(A)$, $TUD(B)\subseteq\rho(B)\cup\sigma_1(B)$, 且设 $\sigma(A)\cup\sigma(B)$ 连通. 令 $C\in B(K,H)$ 且 $f\in H(M_C)$, 若存在 $\lambda\in\sigma(M_C)$, 使得 $|f(\lambda)|=1$, 则 $f(M_C)\in\overline{HC(H\oplus K)}$.

例子 设 $A,B\in B(\ell_2)$ 定义为

$$A(x_1,x_2,\ldots)=(x_2,x_4,x_6,\ldots),\quad B(x_1,x_2,\ldots)=(0,x_1,0,x_2,0,x_3,\ldots),$$

则 $\sigma_1(A)=\sigma(A)=\sigma_b(A)$. 于是 $TUD(A)\subseteq\rho_b(A)\cup\sigma_2(A)=\mathbb{C}$.

直接计算可得

$$\sigma\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=\sigma_w\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=\sigma_b\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=\mathrm{D},$$

则

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\in\overline{HC(\ell_2\oplus\ell_2)}.$$

由定理 3.1, 对任意 $C\in B(\ell_2,\ell_2)$, $M_C\in\overline{HC(\ell_2\oplus\ell_2)}$.

下面研究形如 $\left(\begin{smallmatrix}0&A\\B&0\end{smallmatrix}\right)$ 的 2×2 反对角算子矩阵的亚循环性和超循环性. 和对角矩阵相比, 反对角算子矩阵的亚循环性和超循环性更复杂些. 先看下面引理 [7–8]:

引理 3.5 设 $A\in B(K,H)$, $B\in B(H,K)$, 则

(1) $\overline{w}(AB)$ 和 $\overline{w}(AB)$ 中的非零元素相同, 其中 $\overline{w}\in\{\sigma,\sigma_e,\sigma_w\}$;

(2) $\sigma_w\left(\begin{smallmatrix}AB&0\\0&BA\end{smallmatrix}\right)=\sigma_w(AB)\cup\sigma_w(BA)$;

(3) $\sigma_{ea}\left(\begin{smallmatrix}AB&0\\0&BA\end{smallmatrix}\right)=\sigma_w(AB)=\sigma_{ea}(AB)\cup\sigma_{ea}(BA)$.

对引理 3.5 中 (1), 由文 [8] 知若 $\lambda\neq 0$, 则

$$\begin{pmatrix}AB-\lambda I&0\\0&I\end{pmatrix}=F(\lambda)\begin{pmatrix}BA-\lambda I&0\\0&I\end{pmatrix}E(\lambda),$$

其中对任意 $\lambda\neq 0$, $E(\lambda)$ 和 $F(\lambda)$ 均可逆. 因此当 $\lambda\neq 0$ 时,

$$N(AB-\lambda I)\cong N(BA-\lambda I)\ \text{ 且 }\ R(AB-\lambda I)^{\perp}\cong R(BA-\lambda I)^{\perp},$$

则 $\mathrm{ind}(AB-\lambda I)=\mathrm{ind}(BA-\lambda I)$.

定理 3.6 设 $A\in B(K,H)$, $B\in B(H,K)$. 若 $AB\in\overline{HC(H)}$ 且 $BA\in\overline{HC(K)}$, 则下面的叙述等价:

(1) $\left(\begin{smallmatrix}0&A\\B&0\end{smallmatrix}\right)\in\overline{HC(H\oplus K)}$;

(2) $\sigma_w\left(\begin{smallmatrix}0&A\\B&0\end{smallmatrix}\right)\cup\partial\mathrm{D}$ 连通且 $\sigma_1\left(\begin{smallmatrix}0&A\\B&0\end{smallmatrix}\right)$ 关于原点对称;

(3) $\sigma_w\left(\begin{smallmatrix}0&A\\B&0\end{smallmatrix}\right)\cup\partial\mathrm{D}$ 连通且 $\sigma_{ea}\left(\begin{smallmatrix}0&A\\B&0\end{smallmatrix}\right)$ 关于原点对称.

证明 设 $\left(\begin{smallmatrix}0&A\\B&0\end{smallmatrix}\right)\in\overline{HC(H\oplus K)}$, 则 $\sigma_w\left(\begin{smallmatrix}0&A\\B&0\end{smallmatrix}\right)\cup\partial\mathrm{D}$ 连通. 令 $\lambda_0\notin\sigma_1\left(\begin{smallmatrix}0&A\\B&0\end{smallmatrix}\right)$, 则

$$\dim N\left[\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}-\lambda_0 I\right]<\infty,$$

并且存在 $\epsilon>0$, 使得当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\epsilon$ 时

$$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}-\lambda I\ \text{ 为上半 Fredholm 算子且 }\ \mathrm{ind}\left(\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}-\lambda I\right)\leq 0.$$

由于 $\left(\begin{smallmatrix}0 & A\\ B & 0\end{smallmatrix}\right) \in \overline{HC(H\oplus K)}$, 则必然有 $\left(\begin{smallmatrix}0 & A\\ B & 0\end{smallmatrix}\right) - \lambda I$ 为 Weyl 算子. 根据文 [3, (3.10), (4.3) 式] 中的研究, 我们知道在对算子 A 和 B 没有任何限制的前提下, 都有

$$\overline{w}\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right) = \sqrt{\overline{w}(AB)\cup\overline{w}(BA)}, \quad \text{其中} \ \ \overline{w}\in\{\sigma,\sigma_w\},$$

其中 $\sqrt{K}$ 表示 $K\subseteq\mathbb{C}$ 的平方根集合. 于是 $AB-\lambda^2 I$ 和 $BA-\lambda^2 I$ 均为 Weyl 算子. 接下来, 我们需要证明

$$\dim N(AB-\lambda_0^2 I)<\infty \ \ \text{且} \ \ \dim N(BA-\lambda_0^2 I)<\infty.$$

若 $\lambda_0=0$, 由事实

$$\left(\begin{array}{cc}AB & 0\\ 0 & BA\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)^2$$

知 $\dim N(AB-\lambda_0^2 I)<\infty$ 且 $\dim N(BA-\lambda_0^2 I)<\infty$. 若 $\lambda_0\neq 0$, 因为

$$\bigvee\left\{\left(x,\frac{1}{\lambda_0}Bx\right): x\in N(AB-\lambda_0^2 I)\right\}\cup\bigvee\left\{\left(\frac{1}{\lambda_0}Ay,y\right): y\in N(BA-\lambda_0^2 I)\right\}\subseteq N\left[\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)-\lambda_0 I\right],$$

其中 $\bigvee G$ 表示 G 的闭线性张成, 则 $\dim N(AB-\lambda_0^2 I)<\infty$ 且 $\dim N(BA-\lambda_0^2 I)<\infty$. 关于 $\sigma_1\left(\begin{smallmatrix}0 & A\\ B & 0\end{smallmatrix}\right)$ 的对称性, 我们需要证明

$$-\lambda_0\notin\sigma_1\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right).$$

由前面的证明知 $\dim N\big(\left(\begin{smallmatrix}0 & A\\ B & 0\end{smallmatrix}\right)-\lambda_0^2 I\big)<\infty$. 因为对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$\left(\begin{array}{cc}AB & 0\\ 0 & BA\end{array}\right)-\lambda_0^2 I = \left(\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)-\lambda I\right)\left(\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)+\lambda I\right),$$

于是

$$\dim N\left(\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)+\lambda_0 I\right)<\infty \ \ \text{且当} \ \ 0<|\lambda-\lambda_0|<\epsilon \ \ \text{时} \ \ \left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)+\lambda I$$

为 Weyl 算子. 这就意味着 $-\lambda_0\notin\sigma_1\left(\begin{smallmatrix}0 & A\\ B & 0\end{smallmatrix}\right)$, 所以 $\sigma_1\left(\begin{smallmatrix}0 & A\\ B & 0\end{smallmatrix}\right)$ 关于原点对称.

相反, 设 $\sigma_w\left(\begin{smallmatrix}0 & A\\ B & 0\end{smallmatrix}\right)\cup\partial\mathrm{D}$ 连通且 $\sigma_1\left(\begin{smallmatrix}0 & A\\ B & 0\end{smallmatrix}\right)$ 关于原点对称. 我们需要证明

$$\sigma\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)=\sigma_b\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right) \ \ \text{且当} \ \ \lambda\in\rho_{SF}\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right) \ \text{时}, \operatorname{ind}\left(\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)-\lambda I\right)\geq 0.$$

若存在

$$\lambda_0\in\sigma\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)\Big\backslash\sigma_b\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right),$$

则

$$\left(\begin{array}{cc}AB & 0\\ 0 & BA\end{array}\right)-\lambda_0^2 I$$

为 Weyl 算子. 由于 $\sigma\left(\begin{smallmatrix}0 & A\\ B & 0\end{smallmatrix}\right)=\sqrt{\sigma(AB)\cup\sigma(BA)}$, 利用谱映射定理, 我们知道

$$\sqrt{\mathrm{iso}\sigma\left(\begin{array}{cc}AB & 0\\ 0 & BA\end{array}\right)}=\sqrt{\mathrm{iso}\left(\sigma\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right)\right)^2}=\mathrm{iso}\sigma\left(\begin{array}{cc}0 & A\\ B & 0\end{array}\right),$$

则

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} - \lambda_0 I$$

为 Browder 算子. 于是 $AB-\lambda_0^2 I$ 和 $BA-\lambda_0^2 I$ 均为 Browder 算子. 这就与事实 $AB\in\overline{HC(H)}$ 且 $BA\in\overline{HC(K)}$ 矛盾, 则

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \sigma_b\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

若存在 $\lambda_0\in\rho_{SF}\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$, 使得 $\mathrm{ind}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)-\lambda_0 I\right)<0$, 则 $\lambda_0\notin\sigma_1\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$. 因而 $-\lambda_0\notin\sigma_1\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$. 利用穿孔邻域定理和 $\sigma_1(\cdot)$ 的定义, 存在 $\epsilon>0$, 使得当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\epsilon$ 时, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)-\lambda I\in SF_+^-(H\oplus K)$,

$$\mathrm{ind}\left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}-\lambda I\right)=\mathrm{ind}\left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}-\lambda_0 I\right),\quad \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}+\lambda I\in SF_+^-(H\oplus K),$$

则

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} - \lambda^2 I\in SF_+^-(H\oplus K).$$

由于 $AB\in\overline{HC(H)}$ 且 $BA\in\overline{HC(K)}$, 我们可得

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} - \lambda^2 I$$

为 Weyl 算子. 于是 $AB-\lambda^2 I$ 和 $BA-\lambda^2 I$ 均为 Weyl 算子. 因此 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)-\lambda I$ 为 Weyl 算子. 这就意味着 $\mathrm{ind}\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)-\lambda_0 I$ 为 Weyl 算子. 这与假设

$$\mathrm{ind}\left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}-\lambda_0 I\right)<0$$

矛盾. 由前面的证明知 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)\in\overline{HC(H\oplus K)}$.

由引理 3.5, 我们可以证明 (1) 和 (3) 的等价性.

定理 3.7 设 $A\in B(K,H)$, $B\in B(H,K)$. 若 $AB\in\overline{SC(H)}$ 且 $BA\in\overline{SC(K)}$, 则下面的叙述等价:

(1) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)\in\overline{SC(H\oplus K)}$;

(2) 存在 $r_1\geq 0,\ r_2\geq 0$, 使得

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\cup\partial(\mathrm{r_1D})\quad 和\quad \sigma_w\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\cup\partial(\mathrm{r_2D})$$

均连通, 且 $\sigma_1\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 关于原点对称.

参 考 文 献

[1] Hilden H. M., Wallen L. J., Some cyclic and non-cyclic vectors for certain operators, *Indiana Univ. Math. J.*, 1974, **23**: 557–565.
[2] Kitai C., Invariant closed sets for linear operators, Dissertation, Univ. of Toronto, 1982.
[3] Grabiner S., Uniform ascent and descent of bounded operators, *J. Math. Soc. Japan*, 1982, **34**(2): 317–337.
[4] Herrero D. A., Limits of hypercyclic and supercyclic operators, *J. Functional Analysis*, 1991, **99**: 179–190.
[5] Harte R., Lee W. Y., Another note on Weyl's theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1997, **349**: 2115–2124.
[6] Cao X. H., Meng X., Essential approximate point spectra and Weyl's theorem for operator matrices, *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, **304**: 759–771.
[7] Lee W. Y., Weyl's theorem for operator matrices, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 1998, **32**: 319–331.
[8] Gohberg I., Gohberg S., Kaashoek M. A., Classes of Linear operators, Vol 1, Basel: Birkhäuser, 1990.